

Problema 1

Para o carregamento indicado na Fig.1, e sabendo que as vigas AB e DE têm a mesma rigidez à flexão (EI), determine a reacção em A e a reacção em D .

Cotação: 4.0

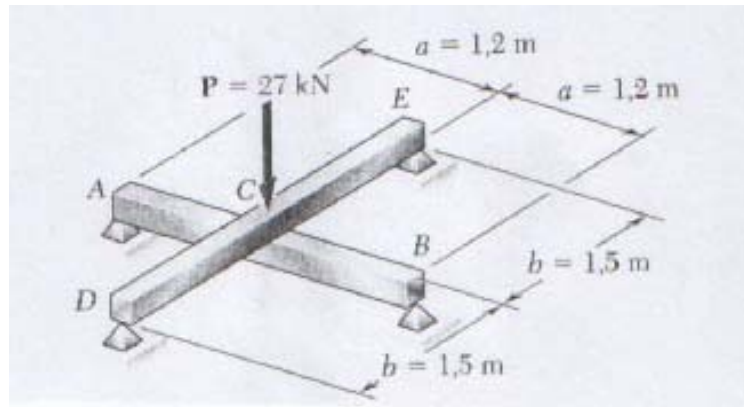


Fig.1

Problema 2

Três barras do mesmo material e com a mesma área da secção transversal suportam a carga $P = 8 \text{ kN}$ (conforme representado na Fig.2). Através da aplicação de um método energético (teorema de Castigliano) determine as forças em cada uma das três barras.

Cotação: 6.0

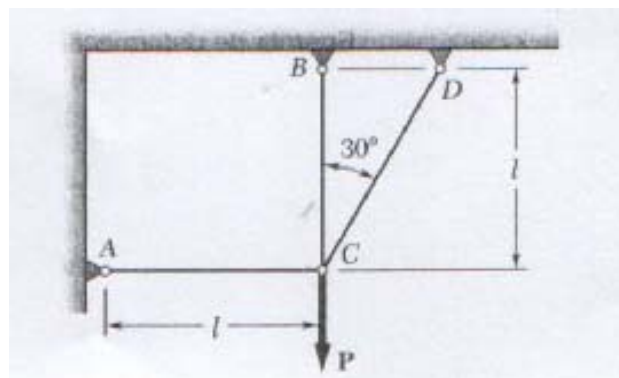
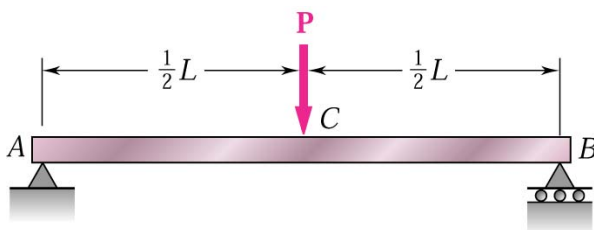


Fig.2

FORMULÁRIO:



$$\text{Flecha máxima} = -\frac{P L^3}{48 EI}$$

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2 A_i E_i} \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

Problema 1

Para o carregamento indicado na Fig.1, e sabendo que as vigas AB e DE têm a mesma rigidez à flexão (EI), determine a reacção em A e a reacção em D .

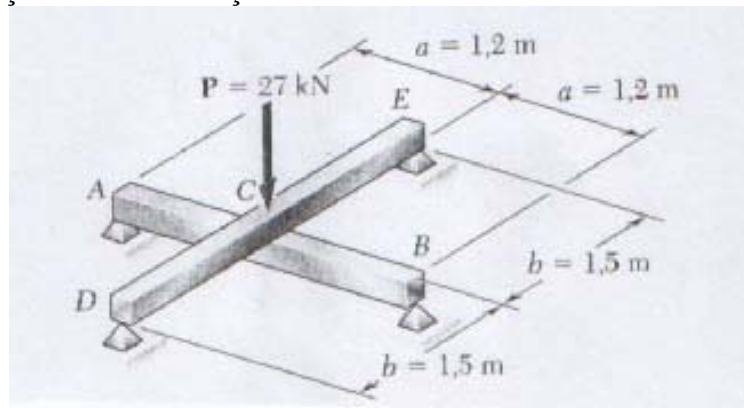
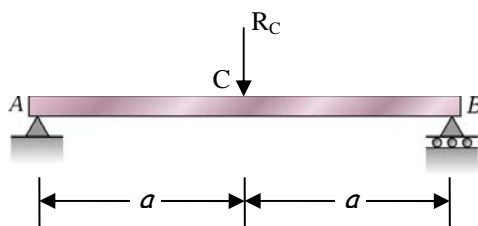


Fig.1

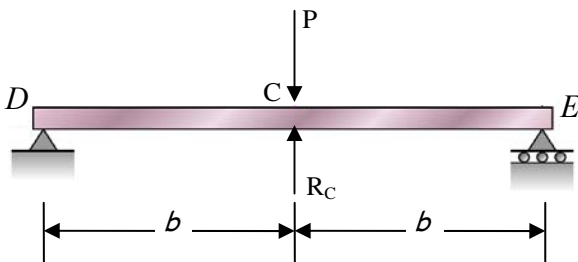
RESOLUÇÃO:

Para a viga AB :



$$(y_C)_{AB} = -\frac{R_C (2a)^3}{48 EI}$$

Para a viga DE :



$$(y_C)_{DE} = -\frac{(P - R_C)(2b)^3}{48 EI}$$

Uma vez que as duas vigas vão ter a mesma flecha em C :

$$-\frac{R_C (2a)^3}{48 EI} = -\frac{(P - R_C)(2b)^3}{48 EI} \quad \Rightarrow \quad 8a^3 R_C = 8b^3 P - 8b^3 R_C \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{P b^3}{a^3 + b^3}$$

$$R_C = \frac{(27 \text{ kN})(1.5 \text{ m})^3}{(1.2 \text{ m})^3 + (1.5 \text{ m})^3} = 17.86 \text{ kN}$$

$$(P - R_C) = 27 \text{ kN} - 17.86 \text{ kN} = 9.14 \text{ kN}$$

As flexões são simétricas tanto na viga AB como na viga DE ; pelo que $R_A = R_B$ e $R_D = R_E$.

$$\text{Como, na viga } AB: \quad R_C = R_A + R_B = 2 R_A = 17.86 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad R_A = R_B = 8.93 \text{ kN}$$

$$\text{e, para a viga } DE: \quad (P - R_C) = R_D + R_E = 2 R_D = 9.14 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad R_D = R_E = 4.57 \text{ kN}$$

Problema 2

Três barras do mesmo material e com a mesma área da secção transversal suportam a carga $P = 8 \text{ kN}$ (conforme representado na Fig.2). Através da aplicação de um método energético (teorema de Castigliano) determine as forças em cada uma das três barras.

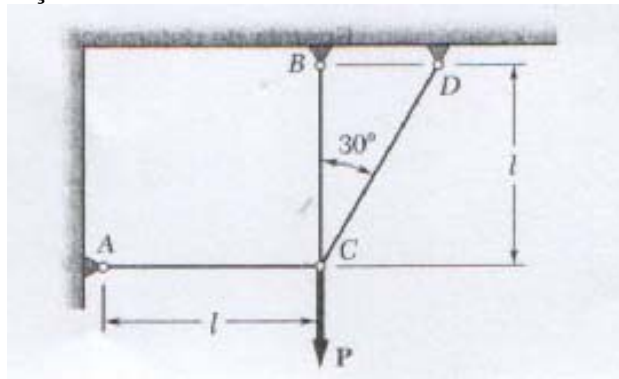
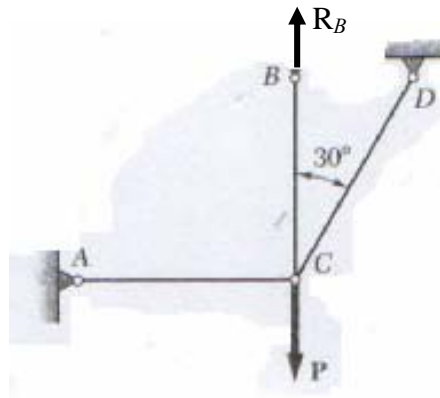


Fig.2

RESOLUÇÃO:



Podemos cortar junto ao nó B e colocar aí a força $R_B = F_{BC}$ (força que actua no membro BC). Aplicando o teorema de Castigliano, o deslocamento vertical do nó B é dado por:

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \frac{\partial F_i}{\partial R_B}, \text{ sendo que } y_B = 0$$

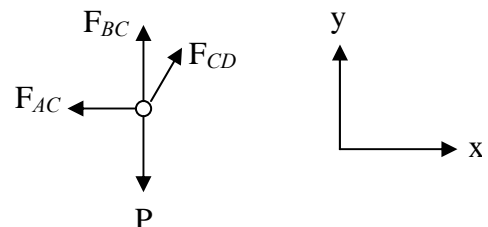
Como as 3 barras são do mesmo material (E) e têm a mesma área da secção transversal (A):

$$y_B = \frac{1}{AE} \sum_{i=1}^3 F_i L_i \frac{\partial F_i}{\partial R_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^3 F_i L_i \frac{\partial F_i}{\partial R_B} = 0$$

Fazendo o equilíbrio das forças que actua no nó C :

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{BC} + F_{CD} \cos 30^\circ - P = 0 \\ F_{CD} &= \frac{2}{\sqrt{3}} P - \frac{2}{\sqrt{3}} F_{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} P - \frac{2}{\sqrt{3}} R_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -F_{AC} + F_{CD} \sin 30^\circ = 0 \\ F_{AC} &= \frac{1}{2} F_{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}} P - \frac{1}{\sqrt{3}} R_B \end{aligned}$$



Membro	F_i	L_i	$\frac{\partial F_i}{\partial R_B}$	$F_i L_i \frac{\partial F_i}{\partial R_B}$
AC	$\frac{1}{\sqrt{3}} P - \frac{1}{\sqrt{3}} R_B$	l	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3} P l + \frac{1}{3} R_B l$
BC	R_B	l	1	$R_B l$
CD	$\frac{2}{\sqrt{3}} P - \frac{2}{\sqrt{3}} R_B$	$\frac{2}{\sqrt{3}} l$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{8}{3\sqrt{3}} P l + \frac{8}{3\sqrt{3}} R_B l$
Σ				$-(\frac{1}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}) P l + (\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}) R_B l$

Fazendo $\sum_{i=1}^3 F_i L_i \frac{\partial F_i}{\partial R_B} = -(\frac{1}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}) P l + (\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}) R_B l = 0$

obtem-se:

$$R_B = \frac{\frac{1}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}}{\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{3}}} P = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{3\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{3\sqrt{3}}} P = \frac{\sqrt{3} + 8}{4\sqrt{3} + 8} P = \frac{9.7320}{14.9282} P = 0.652 P$$

Assim, sendo $P = 8 \text{ kN}$, temos:

$$F_{BC} = R_B = 0.652 P = 0.652 \times 8\,000 \text{ N} = 5\,216 \text{ N}$$

$$F_{CD} = \frac{2}{\sqrt{3}} P - \frac{2}{\sqrt{3}} R_B = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 8\,000 \text{ N} - \frac{2}{\sqrt{3}} \times 5\,216 \text{ N} = 1.1547 \times (8\,000 - 5\,216) = 3\,215 \text{ N}$$

$$F_{AC} = \frac{1}{2} F_{CD} = \frac{3215}{2} \text{ N} = 1\,607 \text{ N}$$