

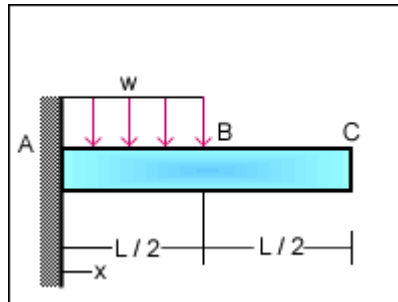
Mecânica dos Materiais II – TESTE 2 – ano lectivo 2004/2005

Problema 1

A viga simplesmente encastrada, representada na Fig.1, é um varão redondo de liga de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) com 2 cm de diâmetro e comprimento de 1 m. Sabendo que $w = 30 \text{ N/m}$, determine usando o método da integração:

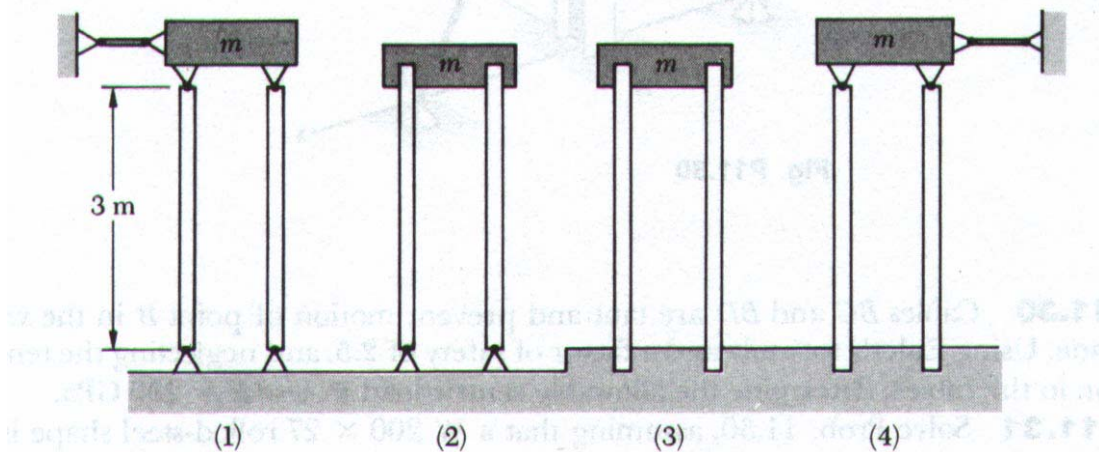
a) a deflexão (flecha) no ponto B

b) a deflexão (flecha) no ponto C.



Problema 2

Um bloco rígido de massa m pode ser suportado por duas colunas segundo os quatro esquemas representados na Fig.2. Cada coluna consiste num tubo de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) com 36 mm de diâmetro externo e 4 mm de espessura de parede. Determine a massa crítica (m_{cr}) para cada uma das quatro situações.

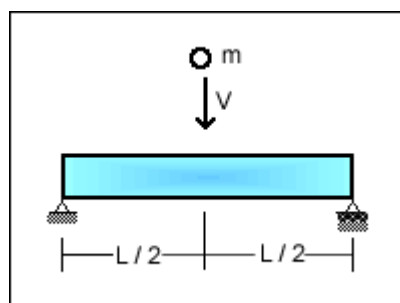


Problema 3

Um projectil de massa m e velocidade V bate no ponto médio da viga representada na Fig.3. Determine (em função da rigidez à flexão da viga EI , do seu comprimento L , e dos valores de m e V):

a) a força estática que provocaria uma deformação equivalente na viga

b) a deflexão (flecha) máxima no ponto médio da viga.



FORMULÁRIO:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x)$$

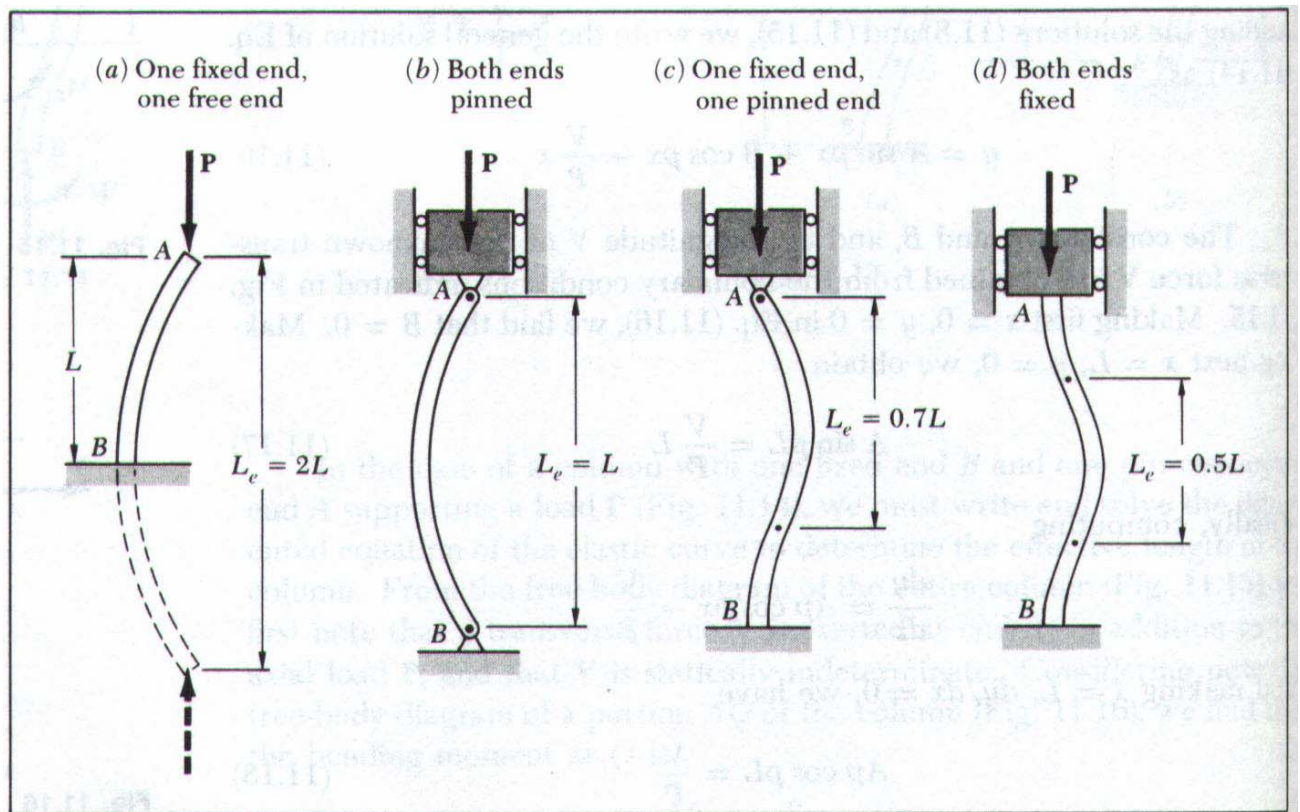
$$I_{\text{circulo}} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

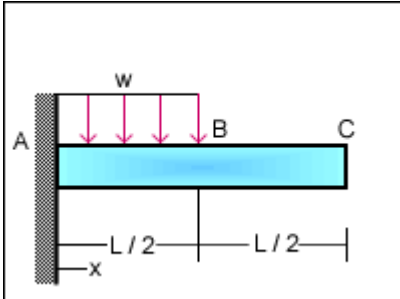


Mecânica dos Materiais II – TESTE 2 – ano lectivo 2004/2005

Problema 1

A viga simplesmente encastrada, representada na Fig.1, é um varão redondo de liga de Alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) com 2 cm de diâmetro e comprimento de 1 m. Sabendo que $w = 30 \text{ N/m}$, determine usando o método da integração:

- a deflexão (flecha) no ponto B
- a deflexão (flecha) no ponto C.



Resolução:

$$I_{\text{varão}} = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} (0.01\text{m})^4 = \frac{\pi}{4} \times 10^{-8} \text{ m}^4 \approx 0.7854 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Resolução pelo método da integração:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) \quad (1)$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1 \quad (2)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \quad (3)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta(x) = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \quad (4)$$

$$EI y(x) = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (5)$$

Analisando o troço AB da viga (usando um diagrama de corpo-livre) obtém-se:

$$C_1 = w \frac{L}{2} \quad C_2 = -w \frac{L^2}{8} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

Assim, usando a Eq.(5), obtém-se y_B fazendo $x = L/2$:

$$EI y_B = -\frac{1}{24}w \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}w \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}w \frac{L^2}{8} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = -\frac{wL^4}{128}$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{128EI} = -\frac{(30 \text{ N/m})(1 \text{ m})^4}{128(70 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2})\left(\frac{\pi}{4} \times 10^{-8} \text{ m}^4\right)} = -0.426 \text{ mm}$$

Usando a Eq.(5), e fazendo $x = L/2$, obtém-se o declive (rotação) em B:

$$EI \theta_B = -\frac{1}{6} w \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(w \frac{L}{2}\right) \left(\frac{L}{2}\right)^2 - w \frac{L^2}{8} \left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{wL^3}{48} \quad \theta_B = -\frac{wL^3}{48EI}$$

Assim, a flecha em C será:

$$y_C = y_B + \theta_B(L/2) = -\frac{wL^4}{128EI} - \frac{wL^3}{48EI} (L/2) = -\frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{7(30 \text{ N/m})(1 \text{ m})^4}{384(70 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2})\left(\frac{\pi}{4} \times 10^{-8} \text{ m}^4\right)} = -0.995 \text{ mm}$$

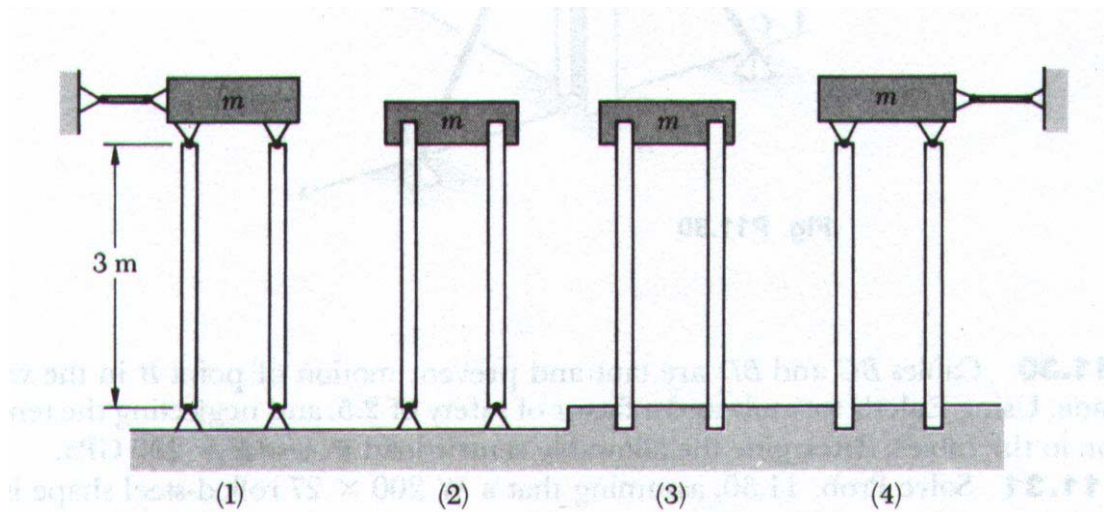
Confirmação pelo método da sobreposição, usando as Tabelas:

$$\theta_B = -\frac{w(L/2)^3}{6EI} = -\frac{wL^3}{48EI} \quad y_B = -\frac{w(L/2)^4}{8EI} = -\frac{wL^4}{128EI}$$

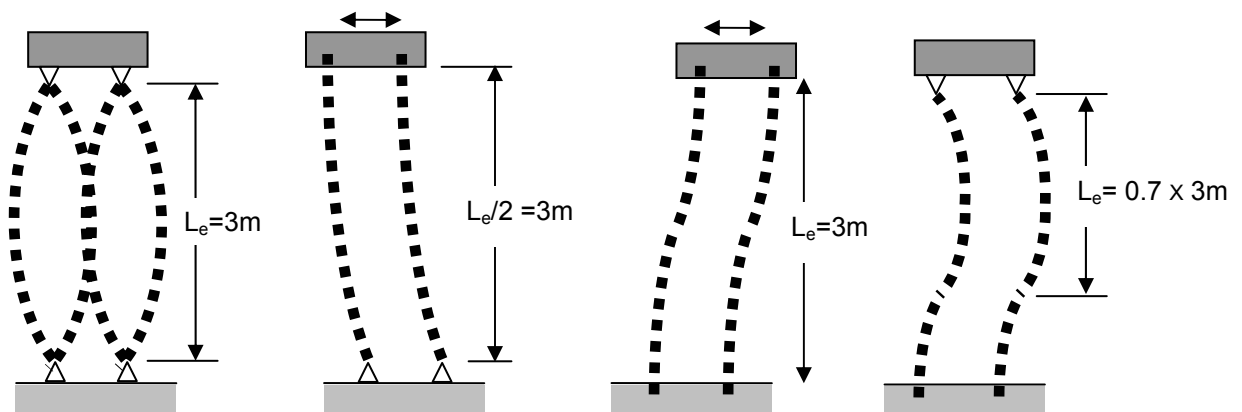
$$y_C = y_B + \theta_B(L/2) = -\frac{wL^4}{128EI} - \frac{wL^3}{48EI} (L/2) = -\frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{7(30 \text{ N/m})(1 \text{ m})^4}{384(70 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2})\left(\frac{\pi}{4} \times 10^{-8} \text{ m}^4\right)} = -0.995 \text{ mm}$$

Problema 2

Um bloco rígido de massa m pode ser suportado por duas colunas segundo os quatro esquemas representados na Fig.2. Cada coluna consiste num tubo de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) com 36 mm de diâmetro externo e 4 mm de espessura de parede. Determine a massa crítica (m_{cr}) para cada uma das quatro situações.



RESOLUÇÃO



Propriedades da secção dos tubos:

$$d_{ext} = 36 \text{ mm} \quad d_{int} = 36 - 2 \times 4 = 28 \text{ mm}$$

$$I \text{ da secção} = \pi/4 (r_{ext}^4 - r_{int}^4) = \pi/4 (18^4 - 14^4) = 52\,276 \text{ mm}^4 = 52\,276 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$EI = (200 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}) (52\,276 \times 10^{-12} \text{ m}^4) = 10\,455,2 \text{ N.m}^2$$

Caso (1) $L_e = 3 \text{ m}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (10\,455,2)}{3^2} = 11\,465,4 \text{ N}$$

$$F_{cr} = m_{cr} \cdot g = 2 \times P_{cr} = 22\,930,8 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad m_{cr} = 2\,340 \text{ kg}$$

Caso (2)

$$L_e = 2 \times 3 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (10\,455,2)}{6^2} = 2\,866,4 \text{ N}$$

$$F_{cr} = m_{cr} \cdot g = 2 \times P_{cr} = 5\,732,8 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad m_{cr} = 585 \text{ kg}$$

Caso (3)

$$L_e = 3 \text{ m}$$

$$F_{cr} = m_{cr} \cdot g = 2 \times P_{cr} = 22\,930,8 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad m_{cr} = 2\,340 \text{ kg}$$

Caso (4)

$$L_e = 0,7 \times 3 \text{ m} = 2,1 \text{ m}$$

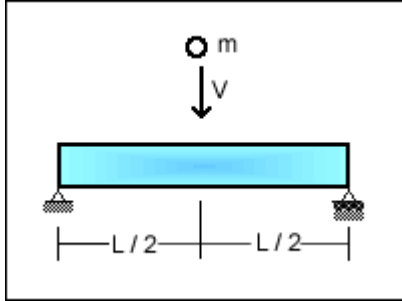
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (10\,455,2)}{2,1^2} = 23\,398,8 \text{ N}$$

$$F_{cr} = m_{cr} \cdot g = 2 \times P_{cr} = 46\,797,6 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad m_{cr} = 4\,775 \text{ kg}$$

Problema 3

Um projectil de massa m e velocidade V bate no ponto médio da viga representada na Fig.3. Determine (em função da rigidez à flexão da viga EI , do seu comprimento L , e dos valores de m e V):

- a) a força estática que provocaria uma deformação equivalente na viga
- b) a deflexão (flecha) máxima no ponto médio da viga.



RESOLUÇÃO:

a)

Para uma viga sujeita a um momento variável:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

Para a situação da viga da Fig.3: $M = -\frac{P_m}{2}x$ entre $x = 0$ e $x = L/2$; sendo P_m a força estática que provocaria uma deformação equivalente na viga.

Como a situação é simétrica:

$$U = 2 \int_0^{L/2} \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_0^{L/2} \frac{P_m^2 x^2}{8EI} dx = \frac{P_m^2 L^3}{96EI}$$

A energia de deformação será igual à energia cinética do projectil:

$$U = \frac{P_m^2 L^3}{96EI} = \frac{1}{2} m v^2$$

pelo que
$$P_m = \sqrt{\frac{48 m v^2 EI}{L^3}}$$

b)

Representando por y_m a deflexão (flecha) máxima no ponto médio da viga, o trabalho executado pela força P_m é dado por:

$$U = \frac{1}{2} P_m y_m \quad \text{ou seja} \quad y_m = \frac{2U}{P_m} = \frac{L^3}{48EI} P_m = \frac{L^3}{48EI} \sqrt{\frac{48 m v^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{m v^2 L^3}{48EI}}$$