

Mecânica dos Materiais II – EXAME – ano lectivo 2004/2005

Problema 1

Considere a viga representada na Fig.1, constituída por duas tábuas de madeira de 20 x 100 mm pregadas a outras duas tábuas de 20 x 125 mm. Sabendo que o espaçamento longitudinal entre pregos é $s = 30$ mm e que o esforço transversal (vertical) na secção é $V = 1\,000$ N, determine:

- a força de corte em cada prego
- o valor da máxima tensão de corte no plano da secção da viga.

Cotação:
a) 3.0
b) 2.0

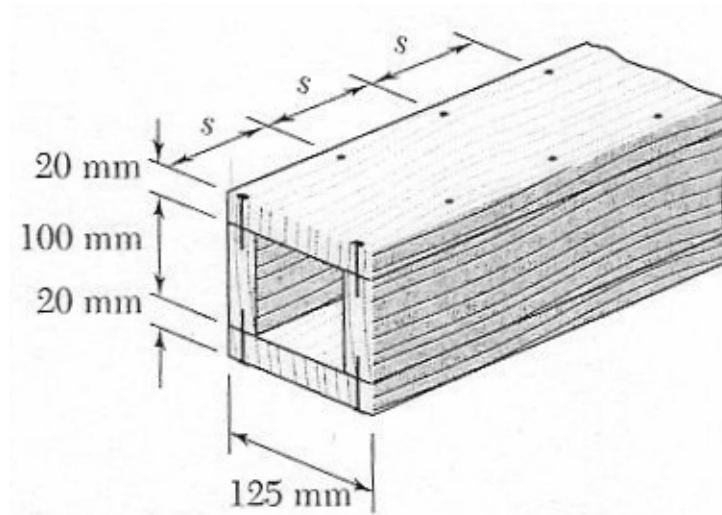


Fig.1

Problema 2

A cisterna de aço representada na Fig.2 tem um diâmetro interno de 3.6 m e a sua parede tem apenas 20 mm de espessura. O cordão de soldadura faz um ângulo $\alpha = 55^\circ$ com o eixo longitudinal da cisterna. Sabendo que a diferença de pressões entre o interior e o exterior da cisterna é 8 bar (800 kPa) determine:

- a tensão normal na direcção longitudinal da cisterna
- a tensão normal na direcção circunferencial da cisterna
- usando a *circunferência de Mohr*, a tensão normal na direcção perpendicular ao cordão de soldadura
- usando a *circunferência de Mohr*, a tensão (de corte) tangencial ao cordão de soldadura.

Cotação:
a) 1.0
b) 1.0
c) 1.5
d) 1.5

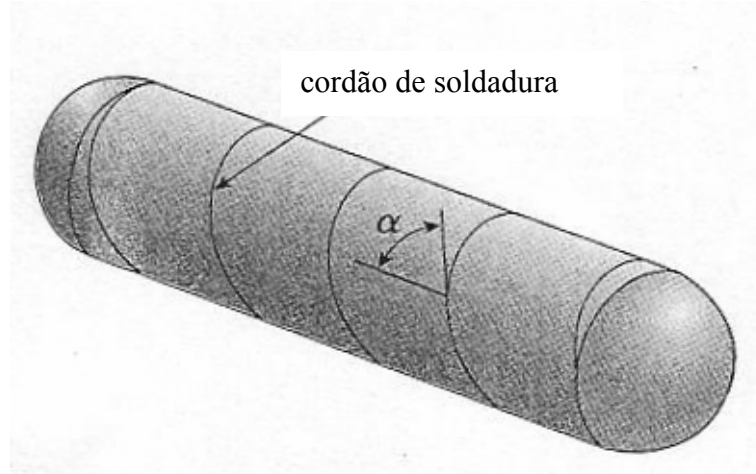


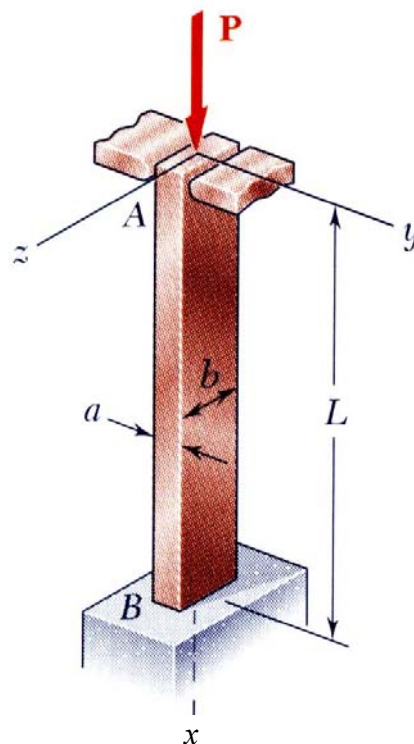
Fig.2

Problema 3

A coluna de liga de Alumínio representada na Fig.3 tem comprimento L e secção transversal rectangular. A coluna encontra-se encastrada no ponto B e está sujeita a uma carga axial centrada, aplicada em A . Dois encostos restringem a extremidade A , impedindo o movimento num dos planos verticais de simetria da coluna, mas permitindo o movimento no outro plano.

a) Determine a relação a/b entre os lados da secção transversal, a que corresponde o dimensionamento mais eficiente relativamente à encurvadura.

b) Dimensione a secção transversal óptima para a coluna, sabendo que $L = 400$ mm, $E = 70$ GPa, $P = 30$ kN e se exige um factor de segurança $F.S. = 2$.

**Fig. 3**

Cotação:

a) 2.5

b) 2.5

Problema 4

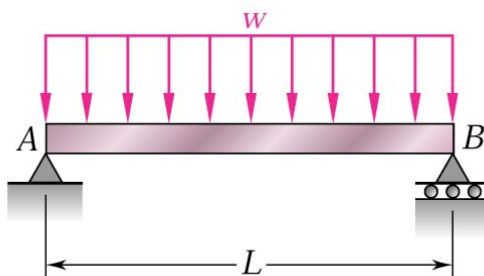
A viga prismática AB representada na Fig. 4 está simplesmente apoiada e suporta uma carga uniformemente distribuída w por unidade de comprimento.

Apresentando os cálculos em função da rigidez à flexão da viga (EI), do seu comprimento (L) e da carga distribuída (w), determine:

a) a equação da linha elástica

b) a flecha máxima da viga

c) a energia de deformação elástica, considerando apenas o efeito das tensões normais.

**Fig. 4**

Cotação:

a) 2.0

b) 1.0

c) 2.0

FORMULÁRIO:

$$I_{\text{do rectângulo}} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$Q = A \bar{y}$$

$$q = \frac{V Q}{I}$$

$$\tau_{\text{médio}} = \frac{V Q}{I t}$$

$$\sigma_1 = \frac{p r}{t} \quad \sigma_2 = \frac{p r}{2 t}$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x)$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2 EI} dx$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x)$$

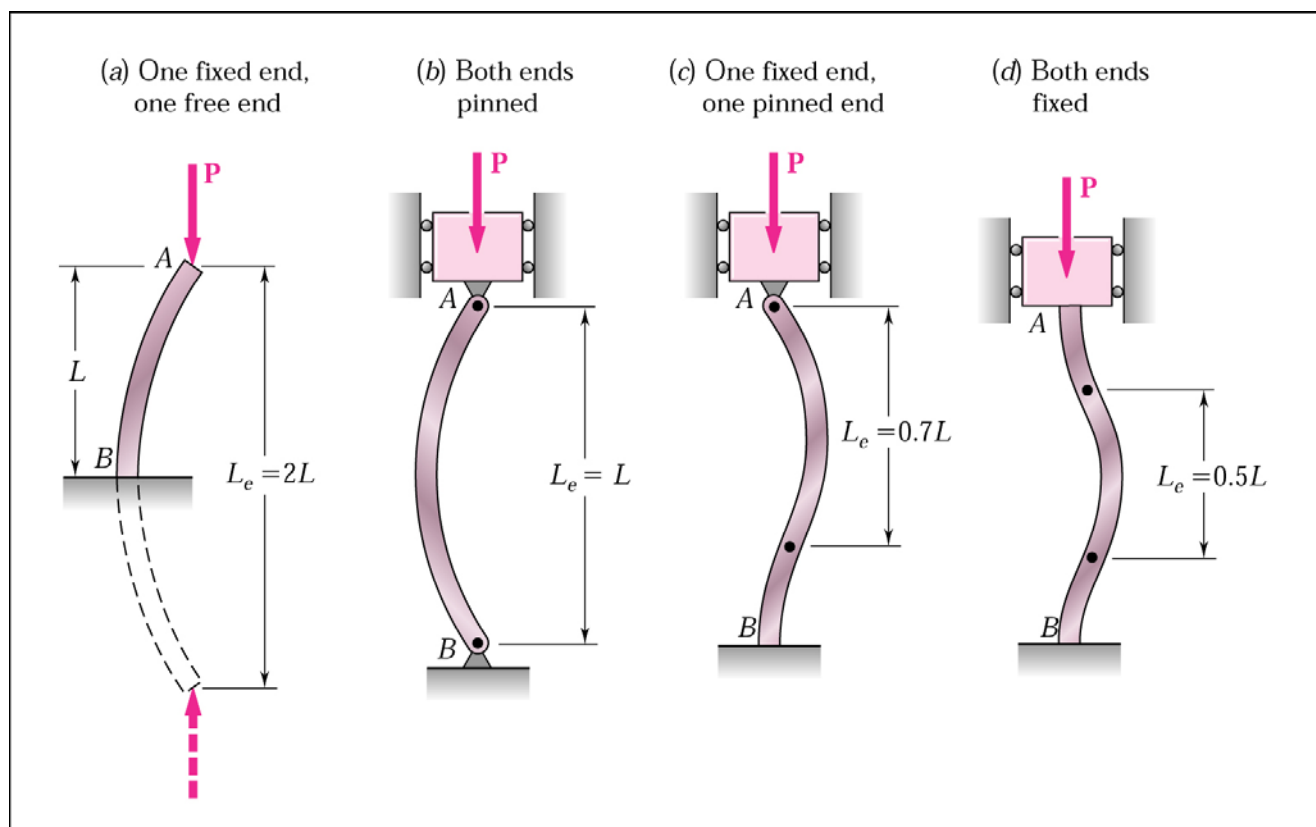
$$i = x, y, z$$

$$P_{\text{cr},i} = \frac{\pi^2 E I_i}{L_{e,i}^2}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$r_i^2 = \frac{I_i}{A}$$

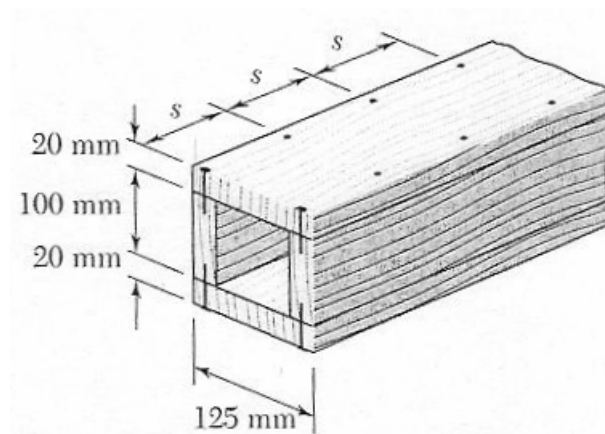
$$\sigma_{\text{cr},i} = \frac{\pi^2 E}{(L_{e,i}/r_i)^2}$$



Problema 1

Considere a viga representada na Fig.1, constituída por duas tábuas de madeira de 20 x 100 mm pregadas a outras duas tábuas de 20 x 125 mm. Sabendo que o espaçamento longitudinal entre pregos é $s = 30$ mm e que o esforço transversal (vertical) na secção é $V = 1\,000$ N, determine:

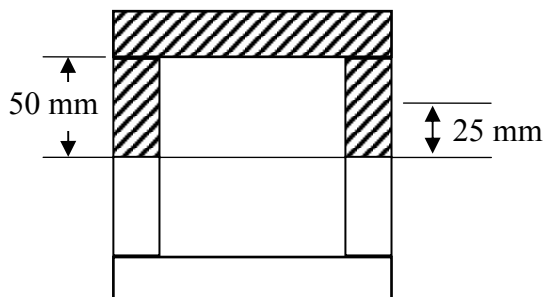
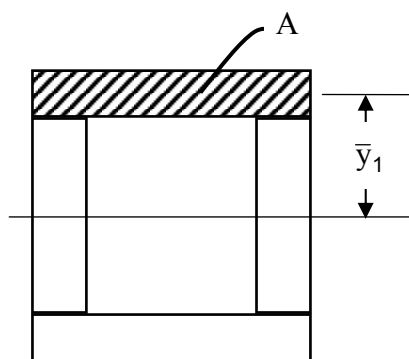
- a força de corte em cada prego
- o valor da máxima tensão de corte no plano da secção da viga.

**Fig.1**

RESOLUÇÃO:

$$I = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 - \frac{1}{12} b_1 h_1^3 = \frac{1}{12} (0.125)(0.140)^3 - \frac{1}{12} (0.085)(0.100)^3 = 28.58 \times 10^{-6} - 7.08 \times 10^{-6}$$

$$I = 21.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



a)

$$A = (0.125)(0.020) = 0.0025 \text{ m}^2$$

$$\bar{y}_1 = 0.050 + 0.010 = 0.060 \text{ m}$$

$$Q_1 = A \bar{y}_1 = (0.0025 \text{ m}^2)(0.060 \text{ m}) = 0.00015 \text{ m}^3$$

$$q = \frac{V Q_1}{I} = \frac{(1000 \text{ N})(0.00015 \text{ m}^3)}{(21.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 6\,976 \text{ N/m}$$

$$q \cdot s = 2 F_{\text{prego}}$$

$$F_{\text{prego}} = \frac{q s}{2} = \frac{(6976 \text{ N/m})(0.030 \text{ m})}{2} = \mathbf{104.6 \text{ N}}$$

b)

$$Q_2 = Q_1 + 2 \times (0.050)(0.020)(0.025) = 0.00015 \text{ m}^3 + 0.00005 \text{ m}^3 = 0.00020 \text{ m}^3$$

$$t = 2 \times (0.020) = 0.040 \text{ m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V Q_2}{I t} = \frac{(1000 \text{ N})(0.00020 \text{ m}^3)}{(21.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})} = \mathbf{232.6 \text{ kPa}}$$

Problema 2

A cisterna de aço representada na Fig.2 tem um diâmetro interno de 3.6 m e a sua parede tem apenas 20 mm de espessura. O cordão de soldadura faz um ângulo $\alpha = 55^\circ$ com o eixo longitudinal da cisterna. Sabendo que a diferença de pressões entre o interior e o exterior da cisterna é 8 bar (800 kPa) determine:

- a tensão normal na direcção longitudinal da cisterna
- a tensão normal na direcção circunferencial da cisterna
- usando a *circunferência de Mohr*, a tensão normal na direcção perpendicular ao cordão de soldadura
- usando a *circunferência de Mohr*, a tensão (de corte) tangencial ao cordão de soldadura.

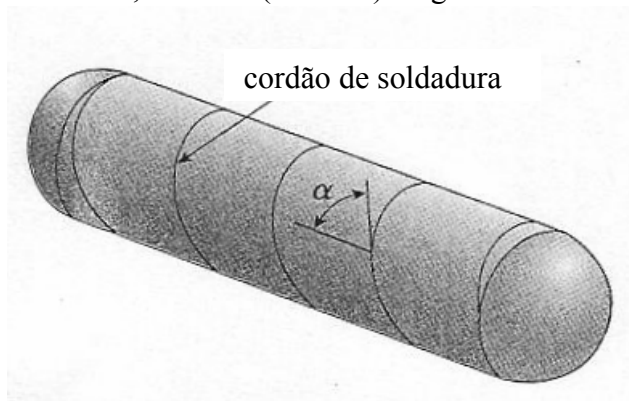
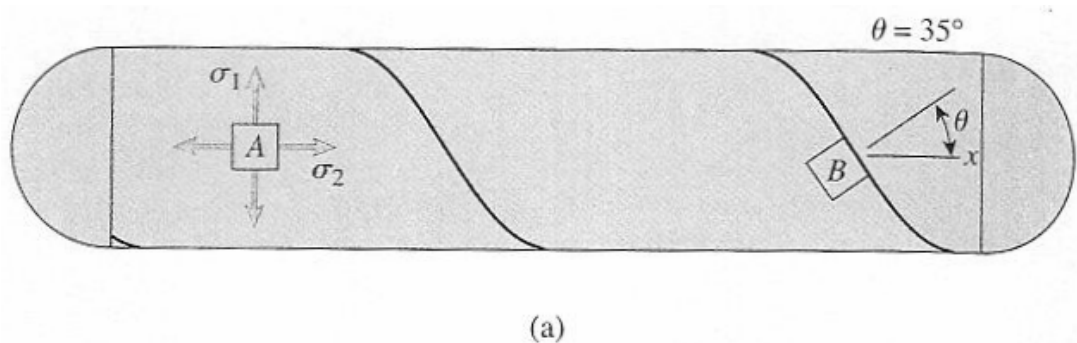


Fig.2

RESOLUÇÃO:

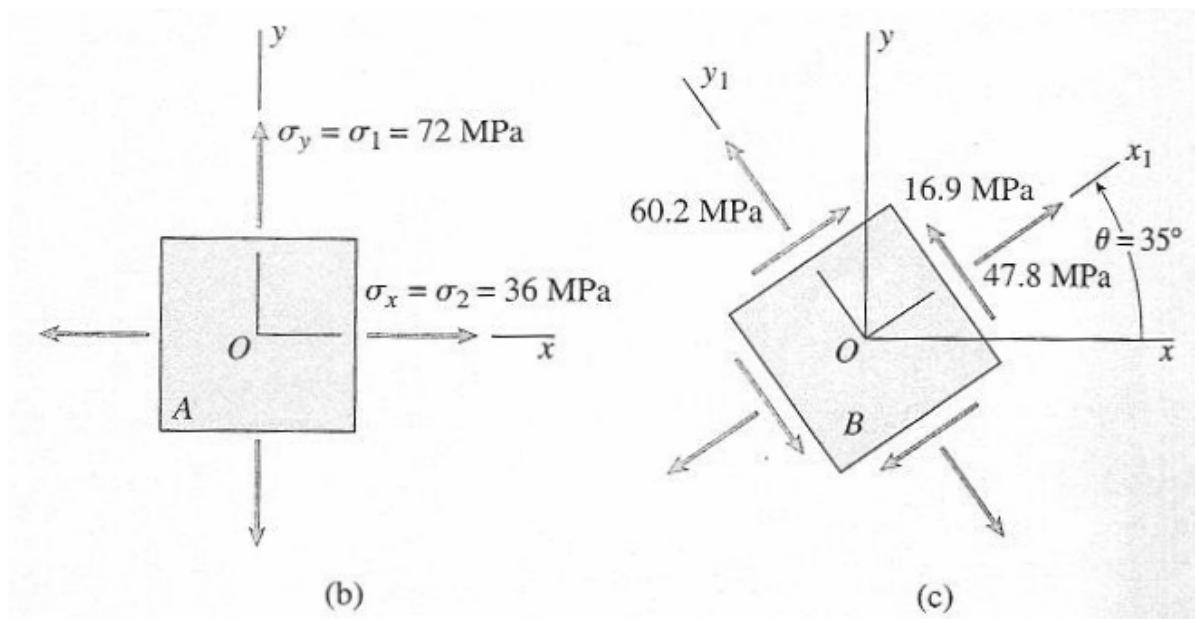


- a)** a tensão normal na direcção longitudinal (σ_2) é dada por:

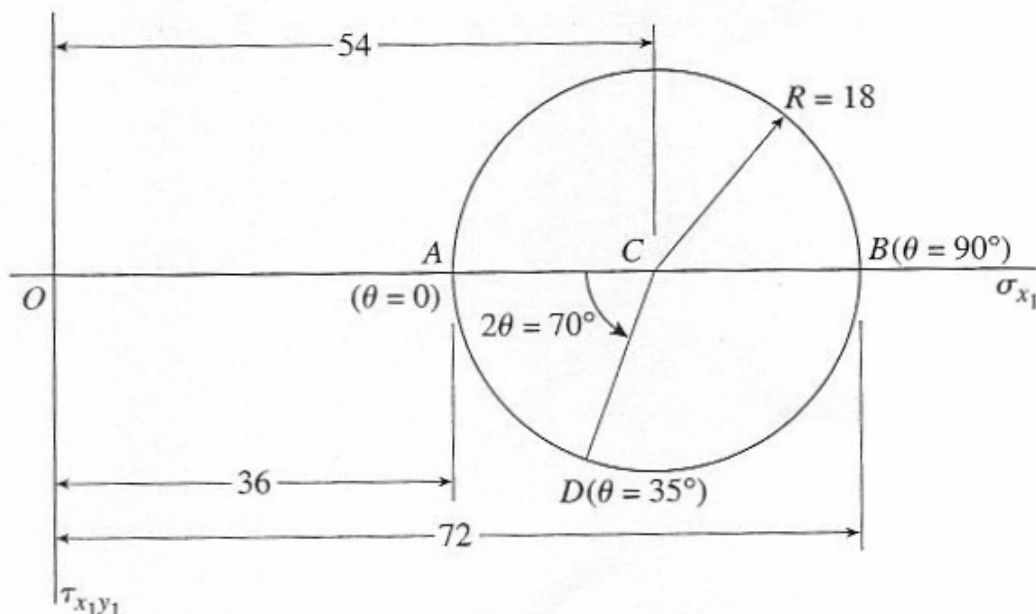
$$\sigma_2 = \frac{p r}{2 t} = \frac{(800 \times 10^3 \text{ Pa})(1.8 \text{ m})}{2 \times (0.020 \text{ m})} = 36 \text{ MPa}$$

- b)** a tensão normal na direcção circunferencial (σ_1) é dada por:

$$\sigma_1 = \frac{p r}{t} = \frac{(800 \times 10^3 \text{ Pa})(1.8 \text{ m})}{(0.020 \text{ m})} = 72 \text{ MPa}$$



A construção de Mohr para o estado plano de tensão representado nas figuras (a), (b) e (c) é a seguinte:



O ponto A representa a tensão $\sigma_2 = 36$ MPa na direcção x ($\theta = 0$); e o ponto B representa a tensão $\sigma_1 = 72$ MPa na direcção y ($\theta = 90^\circ$).

O centro C da circunferência corresponde a um valor de tensão de $\frac{36 + 72}{2} = 54$ MPa.

O raio R da circunferência é: $R = \frac{72 \text{ MPa} - 36 \text{ MPa}}{2} = 18$ MPa.

Partindo do ponto A e rodando, no sentido anti-horário, de um ângulo $2\theta = 70^\circ$ encontra-se o ponto D , o qual representa as tensões (normal e de corte) na direcção x_1 ($\theta = 35^\circ$) que é perpendicular ao cordão de soldadura. Em seguida, podem calcular-se:

c) a tensão normal na direcção perpendicular ao cordão de soldadura:

$$\sigma_{x_1} = 54 \text{ MPa} - R \cos 70^\circ = 54 \text{ MPa} - (18 \text{ MPa}) (\cos 70^\circ) = 47.8 \text{ MPa}$$

d) a tensão tangencial na direcção paralela ao cordão de soldadura:

$$\tau_{x_1y_1} = R \sin 70^\circ = (18 \text{ MPa}) (\sin 70^\circ) = 16.9 \text{ MPa}$$

Problema 3

A coluna de liga de Alumínio representada na Fig.3 tem comprimento L e secção transversal rectangular. A coluna encontra-se encastrada no ponto B e está sujeita a uma carga axial centrada, aplicada em A . Dois encostos restringem a extremidade A , impedindo o movimento num dos planos verticais de simetria da coluna, mas permitindo o movimento no outro plano.

a) Determine a relação a/b entre os lados da secção transversal, a que corresponde o dimensionamento mais eficiente relativamente à encurvadura.

b) Dimensione a secção transversal óptima para a coluna, sabendo que $L = 400 \text{ mm}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $P = 30 \text{ kN}$ e se exige um factor de segurança $F.S. = 2$.

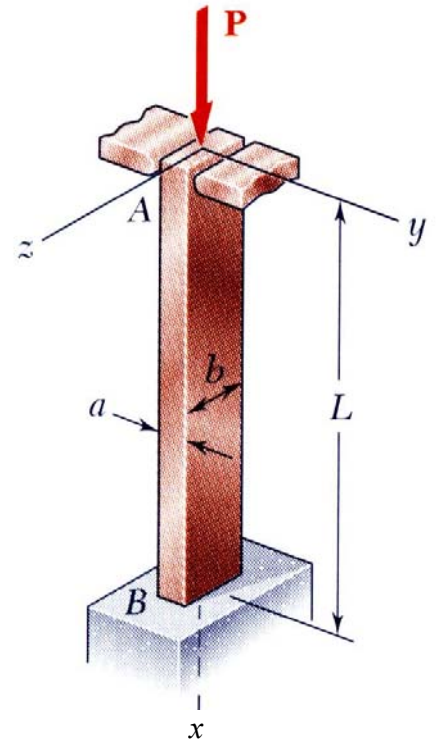


Fig. 3

RESOLUÇÃO:

Encurvadura no plano xy : $L_e = 0.7 L$

O raio de giração r_z da secção transversal obtém-se a partir de: $r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12} b a^3}{a b} = \frac{a^2}{12}$

pelo que: $r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$, e a esbelteza da coluna relativamente à encurvadura no plano xy é pois:

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{0.7 L}{a/\sqrt{12}} \quad (1)$$

Encurvadura no plano xz : $L_e = 2 L$

O raio de giração r_y da secção transversal obtém-se a partir de: $r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12} a b^3}{a b} = \frac{b^2}{12}$

pelo que: $r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$, e a esbelteza da coluna relativamente à encurvadura no plano xz é pois:

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2 L}{b/\sqrt{12}} \quad (2)$$

a) O dimensionamento mais eficiente é aquele para o qual as tensões críticas correspondentes aos dois modos possíveis de encurvadura são iguais. Atendendo à equação: $\sigma_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{(L_{e,i}/r_i)^2}$, conclui-se que esta situação ocorre se os dois valores – (1) e (2) – obtidos para a esbelteza forem iguais. Assim,

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{L_{e,y}}{r_y} \Rightarrow \frac{0.7 L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2 L}{b/\sqrt{12}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} = \mathbf{0.35}$$

b) Usando os dados do problema, $L = 400 \text{ mm}$; $E = 70 \text{ GPa}$; $P = 30 \text{ kN}$ e $F.S. = 2$, pode escrever-se:

$$P_{cr} = (F.S.) \times P = 2 \times 30 \text{ kN} = 60 \text{ kN}$$

tomando $a = 0.35 b$, tem-se $A = a b = 0.35 b^2$ e

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{60000 \text{ N}}{0.35 b^2}$$

fazendo $L = 0.400 \text{ m}$ na Eq.(2), vem $\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2 L}{b / \sqrt{12}} = \frac{2 \times (0.4 \text{ m})}{b / \sqrt{12}} = 2.7713/b$

Substituindo os valores de E , L_e/r e σ_{cr} na equação: $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, obtém-se:

$$\frac{60000 \text{ N}}{0.35 b^2} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})}{(2.7713 / b)^2} \Rightarrow b = 0.0288 \text{ m} = \mathbf{28.8 \text{ mm}}$$

$$a = 0.35 b \Rightarrow a = 0.35 \times 28.8 \text{ mm} = \mathbf{10.08 \text{ mm}}$$

Problema 4

A viga prismática AB representada na Fig. 4 está simplesmente apoiada e suporta uma carga uniformemente distribuída w por unidade de comprimento.

Apresentando os cálculos em função da rigidez à flexão da viga (EI), do seu comprimento (L) e da carga distribuída (w), determine:

- a equação da linha elástica
- a flecha máxima da viga
- a energia de deformação elástica, considerando apenas o efeito das tensões normais.

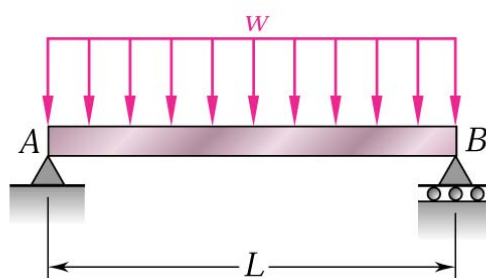
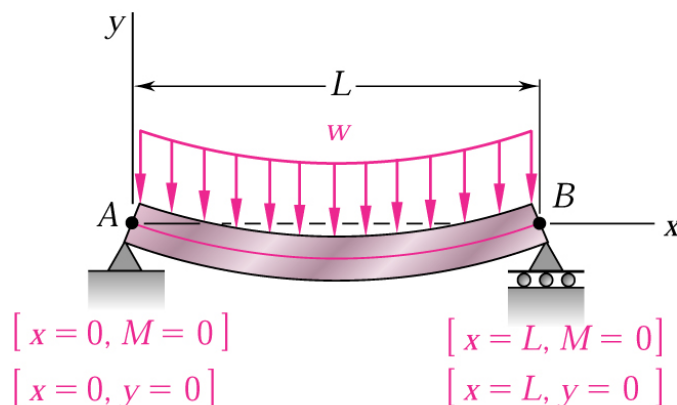


Fig. 4



RESOLUÇÃO:

a)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) \quad (1)$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1 \quad (2)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \quad (3)$$

Usando a eq.(3) e a condição de fronteira: $M = 0$ para $x = 0$, obtém-se $C_2 = 0$.

Usando a eq.(3) e a condição de fronteira: $M = 0$ para $x = L$, obtém-se $C_1 = \frac{1}{2} w L$.

Transpondo os valores de C_1 e C_2 para a eq.(3) e integrando duas vezes, obtém-se:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \quad (4)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3 \quad (5)$$

$$EI y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \quad (6)$$

Como as condições de fronteira impõem que $y = 0$ em ambas as extremidades da viga, fazendo $x = 0$ e $y = 0$ na eq.(6) obtém-se $C_4 = 0$;

e fazendo $x = L$ e $y = 0$ na eq.(6) obtém-se:

$$0 = -\frac{1}{24}wL^4 + \frac{1}{12}wL^4 + C_3 L \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\frac{1}{24}wL^3$$

Transpondo os valores de C_3 e C_4 para a eq.(6), obtém-se a equação da linha elástica:

$$EI y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 - \frac{1}{24}wL^3x$$

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)$$

b) O valor da flecha máxima da viga obtém-se fazendo $x = \frac{L}{2}$ na equação da linha elástica:

$$y_{max} = \frac{w}{24EI} \left(-\frac{L^4}{16} + 2\frac{L^4}{8} - \frac{L^4}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad y_{max} = \frac{w}{24EI} \left(-\frac{L^4}{16} + \frac{4L^4}{16} - \frac{8L^4}{16} \right)$$

$$y_{max} = \frac{w}{24EI} \left(-\frac{5L^4}{16} \right) \quad \Rightarrow \quad y_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

c) Para uma viga sujeita a um momento variável:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

Para a situação da viga da Fig.4, o momento flector é dado pela eq.(4):

$$M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

Então,

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{w}{2} \right)^2 (Lx - x^2)^2 dx = \frac{w^2}{8EI} \int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4) dx = \\ &= \frac{w^2}{8EI} \left(\frac{L^5}{3} - 2\frac{L^5}{4} + \frac{L^5}{5} \right) = \frac{w^2 L^5}{8EI} \left(\frac{10}{30} - \frac{15}{30} + \frac{6}{30} \right) = \frac{w^2 L^5}{240EI} \end{aligned}$$