

Problema 1

Considere o estado plano de tensão representado esquematicamente na Fig.1 com:

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 10 \text{ MPa}.$$

Usando a construção de Mohr, determine:

- a) o ângulo entre a direcção x e a direcção principal de tensão máxima
- b) os valores das tensões principais
- c) o valor da máxima tensão de corte no plano x-y.

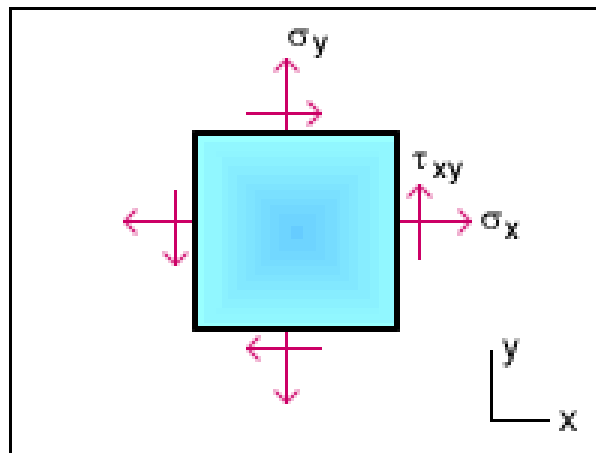


Fig.1

Problema 2

Uma viga em aço ($E = 200 \text{ GPa}$) de secção em I e 10 m de comprimento está sujeita a uma carga uniformemente distribuída $w = 500 \text{ N/m}$ e a uma carga pontual P , conforme se mostra na Fig.2.

Sabendo que o momento principal de inércia da viga é $I = 216 \times 10^6 \text{ mm}^4$, determine o máximo valor de P de modo que a flecha (deflexão) máxima da viga não exceda 5 mm.

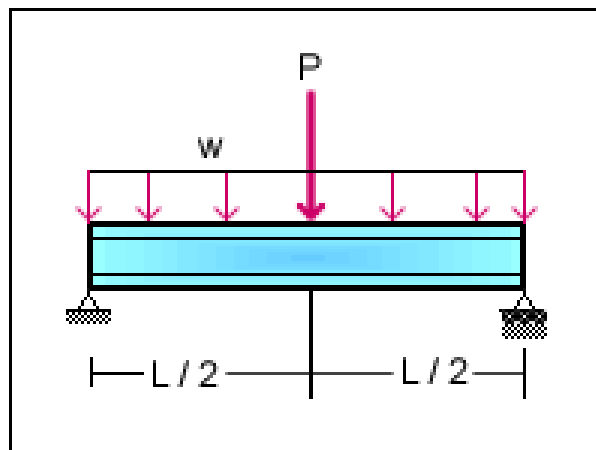


Fig.2

Problema 3

Os dois membros da estrutura representada na Fig.3 são do mesmo material e têm a mesma secção transversal. Os nós B e C são articulações. Em A o membro está encastrado.

a) À medida que a carga P aumenta, qual dos membros (AB ou BC) falhará primeiro devido a instabilidade elástica? Justifique a sua resposta.

b) Calcule o valor admissível para P (em função do comprimento L e da rigidez à flexão EI) considerando um factor de segurança $FS = 2$.

(NOTA: a carga P faz 30° com a horizontal.)

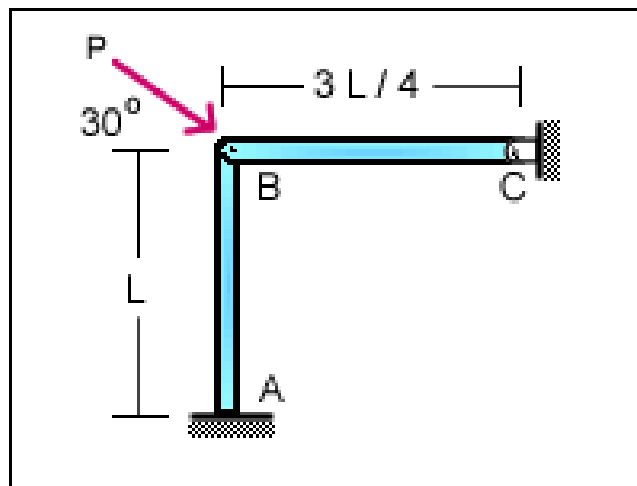


Fig. 3

Problema 4

A estrutura articulada representada na Fig. 4 é formada por 2 membros em aço (com módulo de Young $E = 200$ GPa). A área da secção transversal de cada um dos membros é $10\,000\text{ mm}^2$. Determine o deslocamento vertical do nó B quando se aplica uma carga $P = 1$ MN.

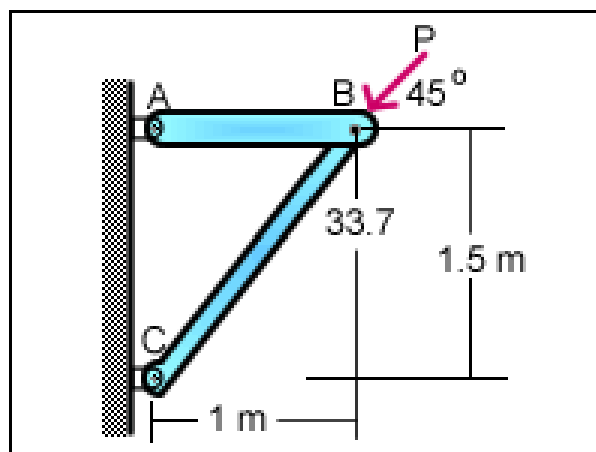


Fig. 4

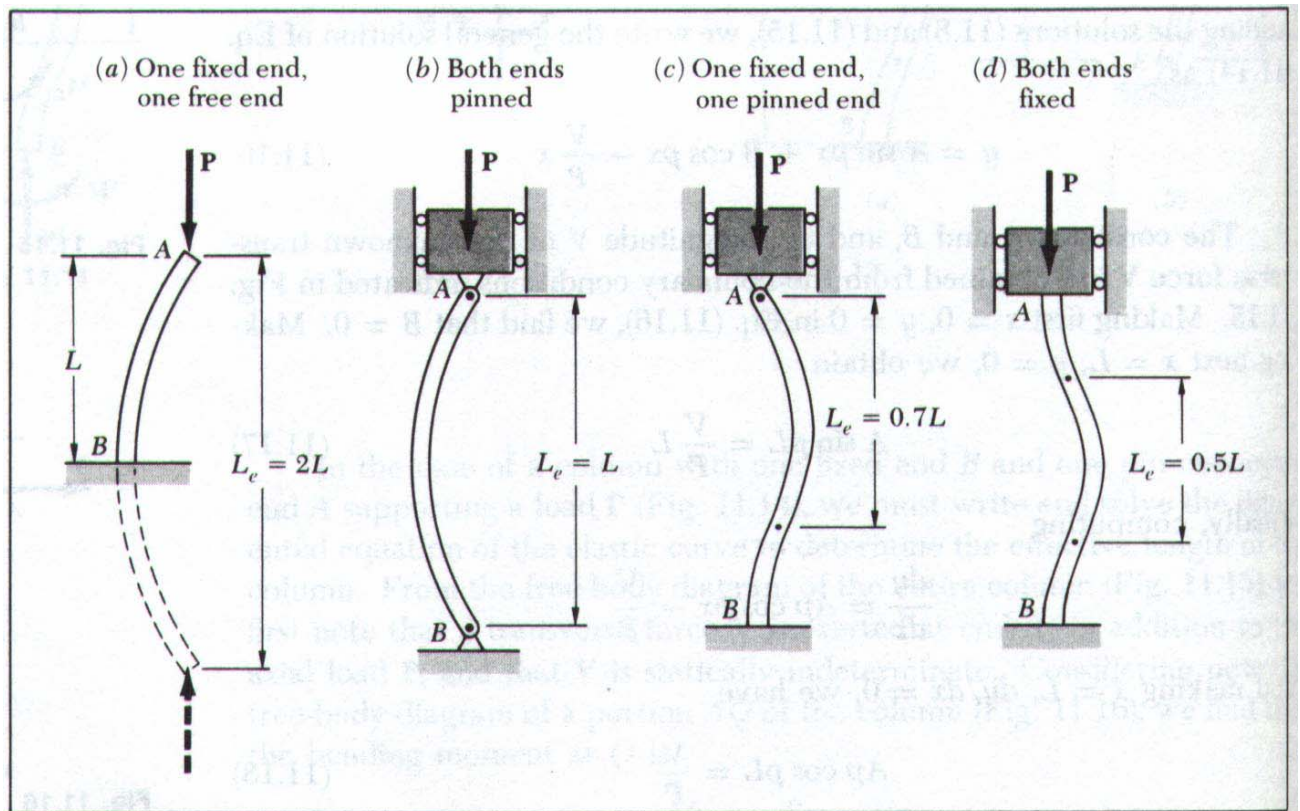
FORMULÁRIO:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2 A_i E}$$

$$U = \int_0^{x_1} F dx$$

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$



Problema 1

Considere o estado plano de tensão representado esquematicamente na Fig.1 com:

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 10 \text{ MPa}.$$

Usando a construção de Mohr, determine:

- o ângulo entre a direção x e a direção principal de tensão máxima
- os valores das tensões principais
- o valor da máxima tensão de corte no plano x - y .

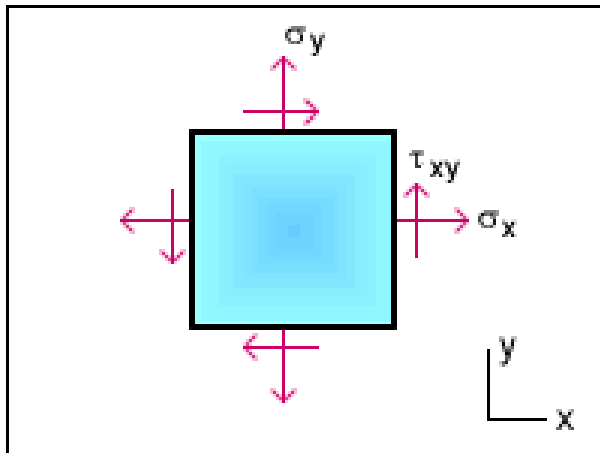
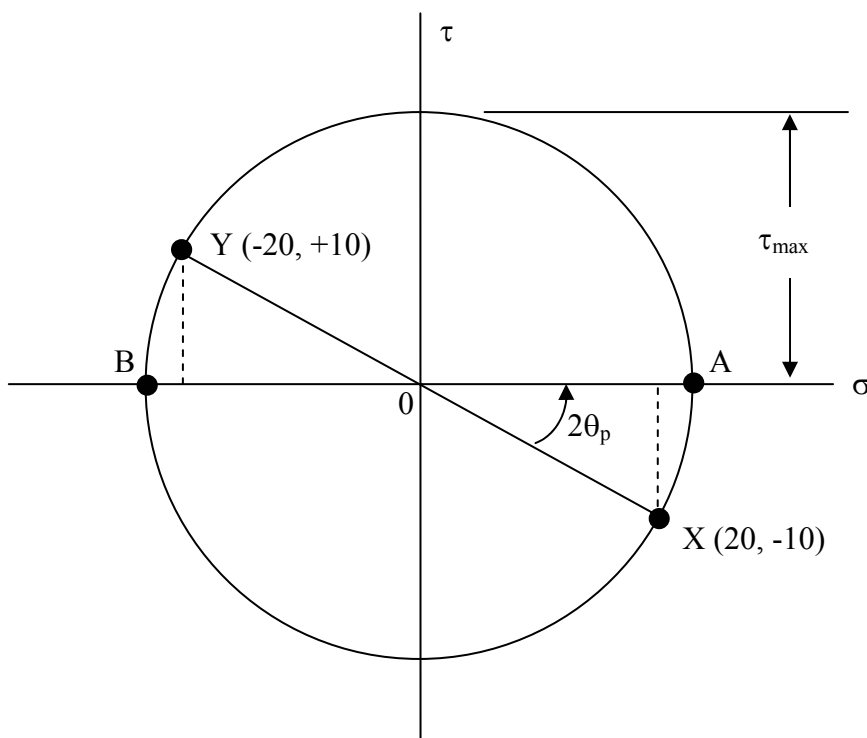


Fig.1

RESOLUÇÃO



- $\tan 2\theta_p = 10/20 = 0.5 \quad 2\theta_p = 26.6^\circ \text{ CW} \quad \theta_p = 13.3^\circ \text{ CW} \rightarrow$
- $R = (20^2 + 10^2)^{0.5} = 22,36 \text{ MPa} \quad \sigma_a = + 22,36 \text{ MPa} \quad \sigma_b = - 22,36 \text{ MPa}$
- $\tau_{\max} = R = 22,36 \text{ MPa}$

Problema 2

Uma viga em aço ($E = 200 \text{ GPa}$) de secção em I e 10 m de comprimento está sujeita a uma carga uniformemente distribuída $w = 500 \text{ N/m}$ e a uma carga pontual P , conforme se mostra na Fig.2. Sabendo que o momento principal de inércia da viga é $I = 216 \times 10^6 \text{ mm}^4$, determine o máximo valor de P de modo que a flecha (deflexão) máxima da viga não exceda 5 mm.

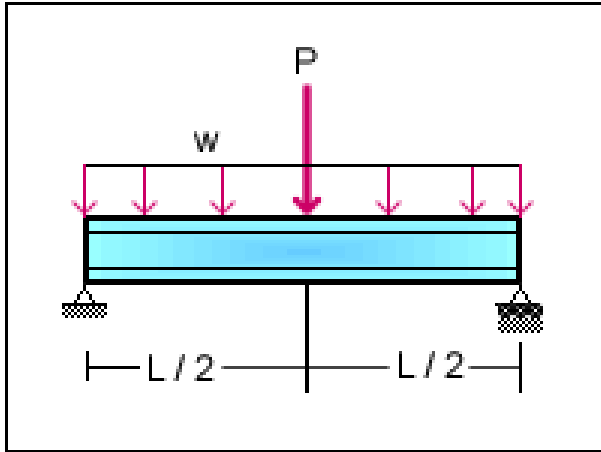


Fig.2

RESOLUÇÃO

Usando o método da sobreposição i.e. “carga uniforme” + “carga centrada” obtém-se (da Tabela):

1) “carga centrada”: $y_{\max,1} = -\frac{PL^3}{48EI}$

2) “carga uniforme”: $y_{\max,2} = -\frac{5wL^4}{384EI}$

pelo que:

$$y_{\max} EI / L^3 = P / 48 + 5 wL / 384$$

Considerando:

$$y_{\max} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad E = 200 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2} \quad I = 216 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad L = 10 \text{ m} \quad w = 500 \text{ N.m}^{-1}$$

obtém-se:

$$P = 48 [(5 \times 10^{-3} \text{ m}) (200 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}) (216 \times 10^{-6} \text{ m}^4) / (10 \text{ m})^3 - 5 (500 \text{ N.m}^{-1})(10 \text{ m}) / 384]$$

$$\mathbf{P = 7243 \text{ N}}$$

Problema 3

Os dois membros da estrutura representada na Fig.3 são do mesmo material e têm a mesma secção transversal. Os nós B e C são articulações; em A o membro está encastrado.

a) À medida que a carga P aumenta, qual dos membros (AB ou BC) falhará primeiro devido a instabilidade elástica? Justifique a sua resposta.

b) Calcule o valor admissível para P (em função do comprimento L e da rigidez à flexão EI) considerando um factor de segurança FS = 2.

(NOTA: a carga P faz 30° com a horizontal.)

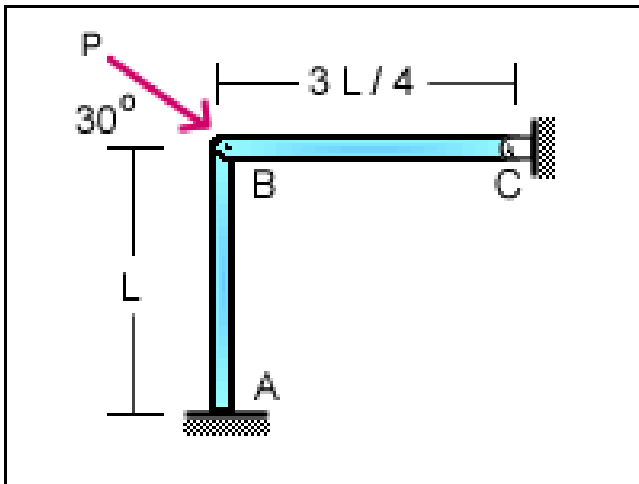


Fig. 3

RESOLUÇÃO

a) Ambos os membros estão à compressão.

$$P_{AB} = P \sin 30^\circ$$

$$P_{BC} = P \cos 30^\circ$$

L_e de AB é 2L

L_e de BC é 3L/4

Substituindo estes valores na equação de Euler, obtém-se:

$$P_{cr,AB} = \pi^2 EI / (2L)^2 = \pi^2 EI / (4L^2) = 0.25 \pi^2 EI / L^2 \Rightarrow P = (0.25 \pi^2 EI / L^2) / \sin 30^\circ$$

$$P = 0.5 \pi^2 EI / L^2$$

$$P_{cr,BC} = \pi^2 EI / (3L/4)^2 = 16 \pi^2 EI / (9L^2) = 1.77 \pi^2 EI / L^2 \Rightarrow P = (1.77 \pi^2 EI / L^2) / \cos 30^\circ$$

$$P = 2.5 \pi^2 EI / L^2$$

Pelo que se conclui que o **membro AB** falhará primeiro.

b) Considerando um factor de segurança FS = 2:

$$P_{adm} = (0.5 \pi^2 EI / L^2) / 2 = 0.25 \pi^2 EI / L^2$$

Problema 4

A estrutura articulada representada na Fig. 4 é formada por 2 membros em aço (com módulo de Young $E = 200 \text{ GPa}$). A área da secção transversal de cada um dos membros é $10\,000 \text{ mm}^2$. Determine o deslocamento vertical do nó B quando se aplica uma carga $P = 1 \text{ MN}$.

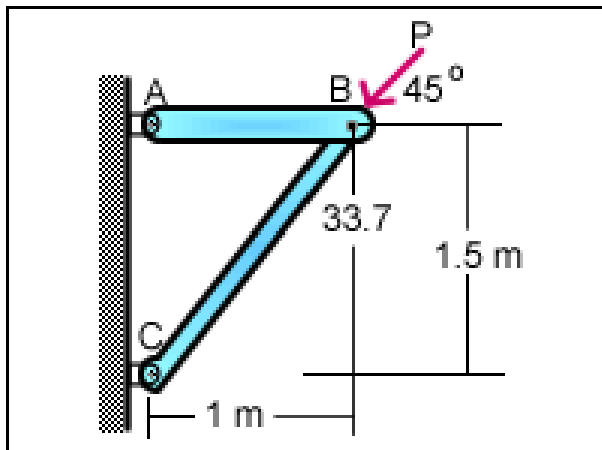


Fig. 4

RESOLUÇÃO

A (área da secção transversal de cada um dos membros) = $10^4 \text{ mm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$

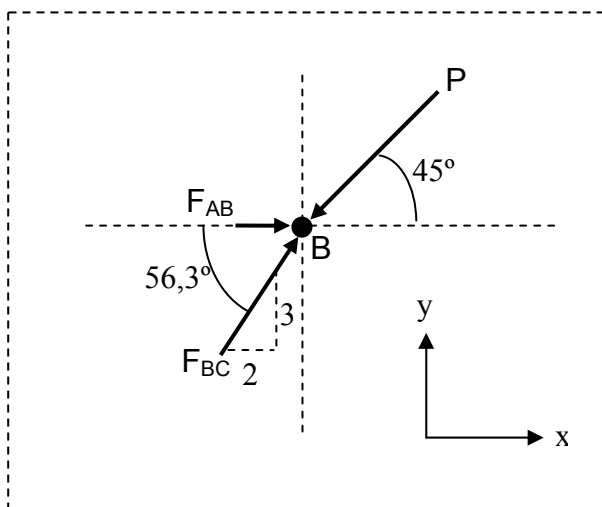
$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$

$AE = 200 \times 10^7 \text{ N} = 2 \times 10^9 \text{ N}$

$L_{AB} = 1 \text{ m}$

$L_{BC} = (1^2 + 1.5^2)^{0.5} = 1.803 \text{ m}$

O ângulo ABC (com vértice em B) = $\arctg(1.5) = 56.3^\circ$



Fazendo o equilíbrio do nó B:

$$\Sigma F_x = 0 :$$

$$F_{AB} - P \cos 45^\circ + F_{BC} \cos 56.3^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 :$$

$$P \cos 45^\circ - F_{BC} \sin 56.3^\circ = 0$$

A força axial presente no membro BC é:

$$F_{BC} = P \cos 45^\circ / \sin 56.3^\circ = 0.85 \text{ MN}$$

A força axial presente no membro AB é:

$$F_{AB} = P \cos 45^\circ - 0.85 \cos 56.3^\circ = 0.235 \text{ MN}$$

pelo que:

$$U_{AB} = F_{AB}^2 L_{AB} / 2 AE = [(0.235 \times 10^6 \text{ N})^2 (1 \text{ m})] / [2 (2 \times 10^9 \text{ N})] = 13,8 \text{ J}$$

e:

$$U_{BC} = F_{BC}^2 L_{BC} / 2 AE = [(0.85 \times 10^6 \text{ N})^2 (1,803 \text{ m})] / [2 (2 \times 10^9 \text{ N})] = 325,7 \text{ J}$$

A energia elástica total presente nos dois membros será:

$$U = U_{AB} + U_{BC} = 13,8 + 325,7 = 339,5 \text{ J} \quad (1)$$

O trabalho executado pela carga P (aplicada monotonamente) é dado por:

$$U = \frac{1}{2} P \delta \quad (2)$$

Igualando (1) a (2) obtém-se o deslocamento δ na direcção da carga P :

$$\delta = 2 \times 339,5 \text{ N.m} / 10^6 \text{ N} = 679 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.679 \text{ mm}$$

O deslocamento vertical será:

$$\delta_v = \delta \cos 45^\circ = \mathbf{0.480 \text{ mm.}}$$