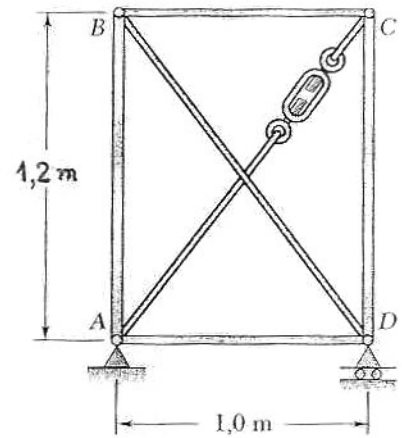


1º Teste de Mecânica dos Materiais I
(7-Nov-2005)

Problema 1 (ver figura)

- a) Admitindo que o esticador está apertado de modo a que o membro AC fica traccionado com uma força de 10 kN, determine as forças presentes nos elementos AB, CD, BC, AD e BD.
- b) Considerando que barras AB e CD são de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e cilíndricas (diâmetro das barras AB e CD = 30 mm), determine a tracção máxima admissível em AC tal que as deformações nos membros AB e CD não ultrapassem 1 mm.



Cotação:

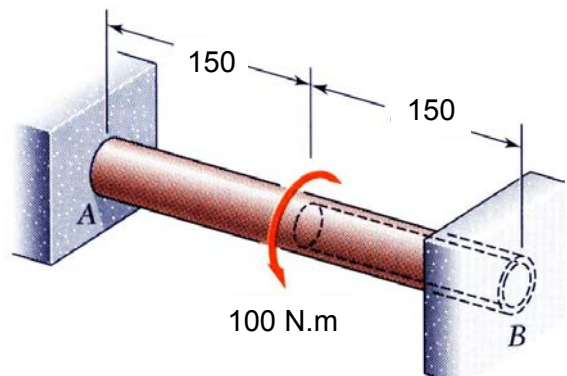
a) 2.5

b) 2.5

Problema 2 (ver figura)

Um veio de secção circular consiste num cilindro de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) com 300 mm de comprimento e 24 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo circular com diâmetro de 16 mm a partir da extremidade B (note: o furo tem 150 mm de comprimento).

O veio está encastrado em ambas as extremidades, e um momento torsor de 100 N.m é aplicado na secção equidistante de A e B.



Assumindo que o veio se comporta no domínio linear-elástico, determine:

- as reacções nos apoios A e B;
- a máxima tensão de corte na parte maciça do veio;
- a máxima tensão de corte na parte em que o veio é oco;
- a rotação (ângulo de torção) da secção onde o momento torsor está aplicado.

Cotação:

a) 2.0

b) 1.0

c) 1.0

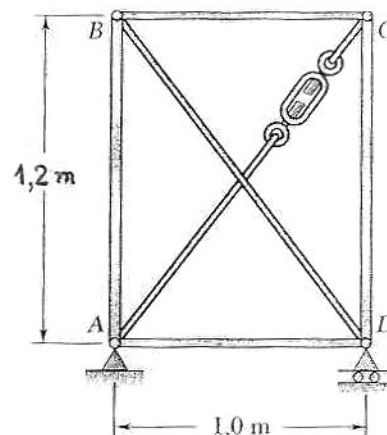
d) 1.0

FORMULÁRIO

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad \phi = \frac{TL}{JG} \quad \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad J \text{ do círculo} = \frac{1}{2} \pi c^4$$

Problema 1 (ver figura)

- a) Admitindo que o esticador está apertado de modo a que o membro AC fica traccionado com uma força de 10 kN, determine as forças presentes nos elementos AB, CD, BC, AD e BD.
- b) Considerando que barras AB e CD são de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e cilíndricas (diâmetro das barras AB e CD = 30 mm), determine a tracção máxima admissível em AC tal que as deformações nos membros AB e CD não ultrapassem 1 mm.

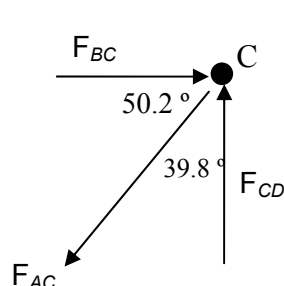
**RESOLUÇÃO**

a) Pelas dimensões da figura, verifica-se que:

$$\text{ângulos } \angle ABD = \angle ACD = \angle BAC = \angle BDC = \arctan \frac{1}{1,2} = 39,8^\circ$$

$$\text{ângulos } \angle CAD = \angle CBD = \angle ACB = \angle ADB = \arctan \frac{1,2}{1} = 50,2^\circ$$

Usando o nó C como corpo-livre:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad F_{CD} - F_{AC} \sin 50,2^\circ = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad F_{BC} - F_{AC} \cos 50,2^\circ = 0$$

Pelo que, sendo $F_{AC} = 10 \text{ kN}$: $F_{CD} = (10 \text{ kN})(\sin 50,2^\circ) = 7,68 \text{ kN}$

$$F_{BC} = (10 \text{ kN})(\cos 50,2^\circ) = 6,40 \text{ kN}$$

Como a estrutura bi-dimensional (treliça) é simétrica e só está sujeita a forças internas (embora se despreze o peso próprio dos membros), os membros equivalentes/simétricos estão sujeitos a forças iguais. Assim:

$$\begin{aligned} F_{AC} &= F_{BD} = 10 \text{ kN em tracção} \\ F_{CD} &= F_{AB} = 7,68 \text{ kN em compressão} \\ F_{BC} &= F_{AD} = 6,40 \text{ kN em compressão} \end{aligned}$$

b) $\delta_{AB} = \delta_{CD} = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$ $A_{AB} = A_{CD} = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (0,030 \text{ m})^2 = 706,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} \quad F_{CD} = \frac{A_{CD} E \delta_{CD}}{L_{CD}} = \frac{(706,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2})(0,001 \text{ m})}{1,2 \text{ m}} = 117,8 \text{ kN}$$

Logo, usando a relação da alínea anterior: $F_{CD} - F_{AC} \sin 50,2^\circ = 0$

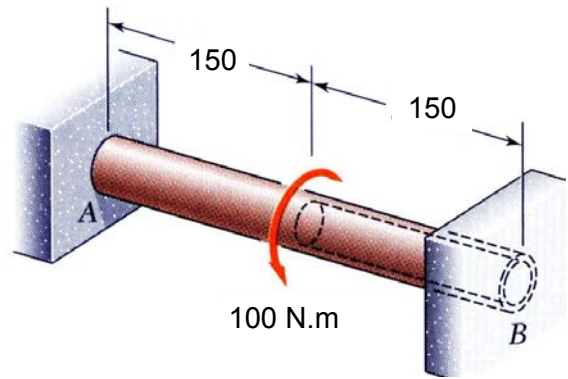
obtem-se:

$$F_{AC} = \frac{F_{CD}}{\sin 50,2^\circ} = \frac{117,8 \text{ kN}}{\sin 50,2^\circ} = 153,3 \text{ kN}$$

Problema 2 (ver figura)

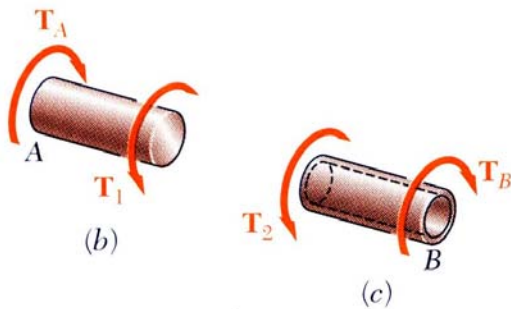
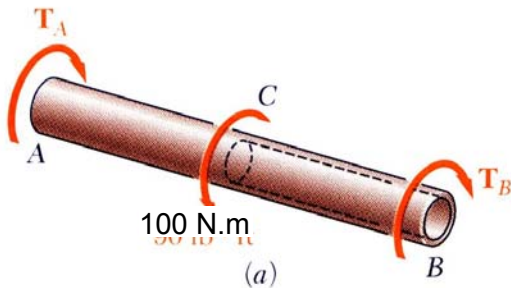
Um veio de secção circular consiste num cilindro de aço ($G = 77 \text{ GPa}$) com 300 mm de comprimento e 24 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo circular com diâmetro de 16 mm a partir da extremidade B (note: o furo tem 150 mm de comprimento).

O veio está encastrado em ambas as extremidades, e um momento torsor de 100 N.m é aplicado na secção equidistante de A e B .



Assumindo que o veio se comporta no domínio linear-elástico, determine:

- as reacções nos apoios A e B ;
- a máxima tensão de corte na parte maciça do veio;
- a máxima tensão de corte na parte em que o veio é oco;
- a rotação (ângulo de torção) da secção onde o momento torsor está aplicado.

**RESOLUÇÃO**

a) Através de um diagrama de corpo-livre do veio, podemos escrever:

$$T_A + T_B = 100 \text{ N.m} \quad (1)$$

Como o problema é estaticamente indeterminado, dividimos o veio em duas partes, as quais se deformam de modo compatível:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \quad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Substituindo na eq.(1), obtém-se:

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 100 \text{ N.m} \quad T_A \left(1 + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} \right) = 100 \text{ N.m}$$

Como $L_1 = L_2$;

$$J_1 = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.012 \text{ m})^4 = 32572 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.012)^4 - (0.008)^4] = 26138 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$T_A = \frac{100 \text{ N.m}}{\left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right)} = \frac{100 \text{ N.m}}{\left(1 + \frac{26138 \times 10^{-12} \text{ m}^4}{32572 \times 10^{-12} \text{ m}^4} \right)} = 55.48 \text{ N.m}$$

$$T_B = 100 \text{ N.m} - T_A = 44.52 \text{ N.m}$$

b) a máxima tensão de corte na parte maciça do veio é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{T_A c}{J_1} = \frac{(55.48 \text{ N.m})(0.012 \text{ m})}{32572 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = \mathbf{20.44 \text{ MPa}}$$

c) a máxima tensão de corte na parte em que o veio é oco é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{T_B c}{J_2} = \frac{(44.52 \text{ N.m})(0.012 \text{ m})}{26138 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = \mathbf{20.44 \text{ MPa}}$$

d) a rotação (ângulo de torção) da secção onde o momento torsor está aplicado é dada por:

$$\phi = \frac{T_A L_1}{J_1 G} = \frac{(55.48 \text{ N.m})(0.150 \text{ m})}{(32572 \times 10^{-12} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} = \mathbf{3.32 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.19^\circ}$$

ou

$$\phi = \frac{T_B L_2}{J_2 G} = \frac{(44.52 \text{ N.m})(0.150 \text{ m})}{(26138 \times 10^{-12} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} = \mathbf{3.32 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.19^\circ}$$