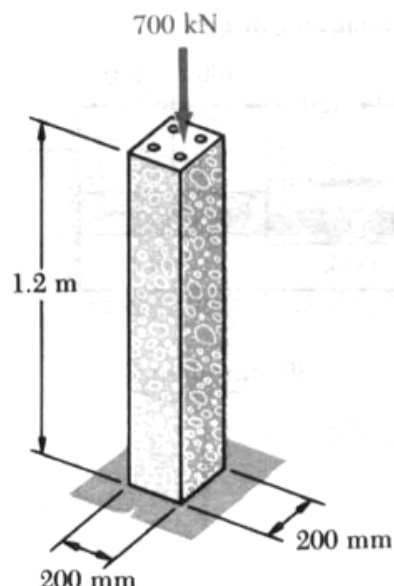


**Problema 1** (ver figura)

Uma coluna de betão ( $E_{\text{betão}} = 25 \text{ GPa}$ ) com 1.2 m de altura é reforçada com 4 varões de aço ( $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ ), cada um com 19 mm de diâmetro.

- Determine os valores da tensão normal no aço e no betão quando é aplicada na coluna uma força externa de 700 kN (centrada e de compressão) tal como representado na figura;
- Considerando  $\alpha_{\text{aço}} = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  e  $\alpha_{\text{betão}} = 9.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , determine os valores da tensão normal induzida no aço e no betão quando a temperatura sobe  $45 ^\circ\text{C}$  (sem que haja qualquer força externa aplicada).

**RESOLUÇÃO:**

$$A_{\text{aço}} = 4 \times \left[ \frac{\pi}{4} (0.019)^2 \right] = 0.00113 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{betão}} = (0.2 \times 0.2) - A_{\text{aço}} = 0.03887 \text{ m}^2$$

$$\delta_{\text{aço}} = \frac{P_{\text{aço}} L}{A_{\text{aço}} E_{\text{aço}}} = \frac{P_{\text{aço}} (1.2 \text{ m})}{(0.00113 \text{ m}^2) (200 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} = 5.3097 \times 10^{-9} P_{\text{aço}}$$

$$\delta_{\text{betão}} = \frac{P_{\text{betão}} L}{A_{\text{betão}} E_{\text{betão}}} = \frac{P_{\text{betão}} (1.2 \text{ m})}{(0.03887 \text{ m}^2) (25 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} = 1.2349 \times 10^{-9} P_{\text{betão}}$$

- a) Como tem de haver compatibilidade de deformações,  $\delta_{\text{aço}} = \delta_{\text{betão}}$

$$\text{assim: } 5.3097 \times 10^{-9} P_{\text{aço}} = 1.2349 \times 10^{-9} P_{\text{betão}}$$

$$P_{\text{aço}} = 0.23257 P_{\text{betão}} \quad (1)$$

No entanto, também se sabe que:

$$P_{\text{aço}} + P_{\text{betão}} = P = 700 \text{ kN} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), obtém-se:

$$1.23257 P_{\text{betão}} = 700 \text{ kN} \quad P_{\text{betão}} = 567.9 \text{ kN}$$

$$P_{\text{aço}} = 700 \text{ kN} - 567.9 \text{ kN} = 132.1 \text{ kN}$$

Finalmente,

$$\sigma_{\text{aço}} = - \frac{P_{\text{aço}}}{A_{\text{aço}}} = - \frac{132.1 \times 10^3 \text{ N}}{0.00113 \text{ m}^2} = - 116.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{betão}} = - \frac{P_{\text{betão}}}{A_{\text{betão}}} = - \frac{567.9 \times 10^3 \text{ N}}{0.03887 \text{ m}^2} = - 14.6 \text{ MPa}$$

b)

Caso não existisse nenhum constrangimento (*i.e.* o aço e o betão pudessem dilatar-se livremente):

$$(\delta_T)_{aço} = \alpha_{aço} (\Delta T) L$$

$$(\delta_T)_{betão} = \alpha_{betão} (\Delta T) L$$

Como o  $\alpha_{aço}$  é maior que o  $\alpha_{betão}$ , o facto dos dois materiais estarem ligados entre si faz com que apareça no betão uma força  $P$  de tracção; e uma força de compressão  $-P$  no aço.

Os dois materiais deformam-se também devido a estas forças, sendo essas deformações calculadas pelas seguintes expressões:

$$(\delta_P)_{aço} = \frac{-P L}{A_{aço} E_{aço}} \quad (\delta_P)_{betão} = \frac{P L}{A_{betão} E_{betão}}$$

Como tem de haver compatibilidade das deformações totais,  $\delta_{aço} = \delta_{betão}$

$$(\delta_T)_{aço} + (\delta_P)_{aço} = (\delta_T)_{betão} + (\delta_P)_{betão}$$

assim:

$$\alpha_{aço} (\Delta T) L + \frac{-P L}{A_{aço} E_{aço}} = \alpha_{betão} (\Delta T) L + \frac{P L}{A_{betão} E_{betão}}$$

$$\begin{aligned} 11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} (45 \text{ } ^\circ\text{C})(1.2 \text{ m}) + \frac{-P (1.2 \text{ m})}{(0.00113 \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} &= \\ &= 9.9 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} (45 \text{ } ^\circ\text{C})(1.2 \text{ m}) + \frac{P (1.2 \text{ m})}{(0.03887 \text{ m}^2)(25 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} \\ 631.6 \times 10^{-6} - 5.31 \times 10^{-9} P &= 534.6 \times 10^{-6} + 1.235 \times 10^{-9} P \\ -6.545 \times 10^{-9} P &= -97 \times 10^{-6} \\ P &= 14820 \text{ N} \end{aligned}$$

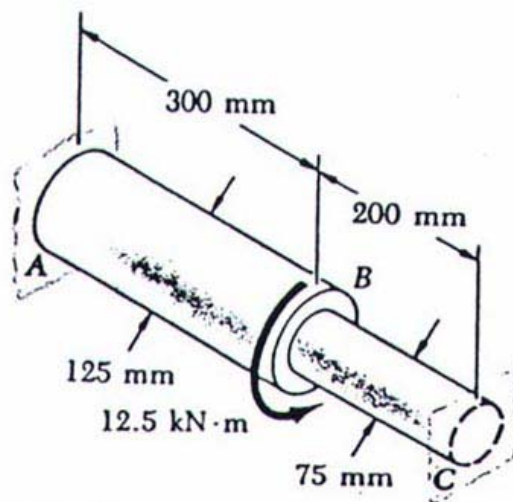
Finalmente,

$$\begin{aligned} \sigma_{aço} &= -\frac{P}{A_{aço}} = -\frac{14820 \text{ N}}{0.00113 \text{ m}^2} = -13.1 \text{ MPa} \\ \sigma_{betão} &= \frac{P}{A_{betão}} = \frac{14820 \text{ N}}{0.03887 \text{ m}^2} = +381 \text{ kPa} \end{aligned}$$

**Problema 2** (ver figura)

Os cilindros maciços AB e BC estão soldados entre si (em B) e encastrados nos apoios A e C. O veio AB é de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ) e o veio BC é de latão ( $G = 39 \text{ GPa}$ ). Em B está aplicado um momento torsor de  $12.5 \text{ kN.m}$ . Assumindo que ambos os veios se comportam no domínio linear-elástico, determine:

- as reacções nos apoios A e C
- a máxima tensão de corte no veio AB
- a máxima tensão de corte no veio BC
- a rotação (ângulo de torção) da secção de ambos os veios em B.

**RESOLUÇÃO:**

Sendo  $T_A$  e  $T_C$  as reacções nos apoios A e C, podemos verificar (através de simples *diagramas de corpo livre*) que:  $T_{AB} = T_A$  e  $T_{BC} = T_C$

Por outro lado, como os veios AB e BC estão soldados entre si (em B) e encastrados nos apoios A e C, podemos escrever:

$$\phi_{C/A} = \phi_{B/A} + \phi_{C/B} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB} G_{AB}} - \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC} G_{BC}} = 0$$

$$T_{BC} = \frac{L_{AB} G_{BC} J_{BC}}{L_{BC} G_{AB} J_{AB}} T_{AB} \quad T_{BC} = \frac{(0.3 \text{ m})(39 \text{ GPa}) \frac{\pi}{2} (0.0375 \text{ m})^4}{(0.2 \text{ m})(77 \text{ GPa}) \frac{\pi}{2} (0.0625 \text{ m})^4} T_{AB}$$

$$T_{BC} = 0.09846 T_{AB} \quad (1)$$

$$\text{No entanto, também se sabe que:} \quad T_{AB} + T_{BC} = 12.5 \text{ kN.m} \quad (2)$$

E resolvendo o sistema de equações (1) e (2), obtém-se:

$$T_{AB} + 0.09846 T_{AB} = 12.5 \text{ kN.m}$$

$$T_{AB} = 11.38 \text{ kN.m}$$

$$T_{BC} = 12.5 \text{ kN.m} - 11.38 \text{ kN.m} = 1.12 \text{ kN.m}$$

$$\text{a) as reacções nos apoios A e C, são portanto:} \quad T_A = 11.38 \text{ kN.m} \quad T_C = 1.12 \text{ kN.m}$$

b) a máxima tensão de corte no veio AB é dada por:

$$\tau_{\max, AB} = \frac{T_{AB} c_{AB}}{J_{AB}} = \frac{(11380 \text{ N.m})(0.0625 \text{ m})}{\frac{\pi}{2} (0.0625 \text{ m})^4} = 29.7 \text{ MPa}$$

c) a máxima tensão de corte no veio BC é dada por:

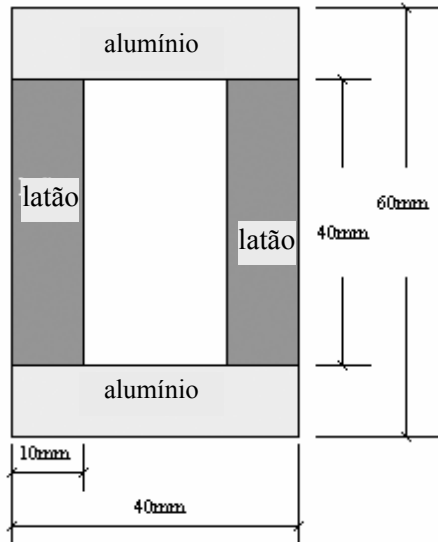
$$\tau_{\max, BC} = \frac{T_{BC} c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{(1120 \text{ N.m})(0.0375 \text{ m})}{\frac{\pi}{2} (0.0375 \text{ m})^4} = 13.5 \text{ MPa}$$

d) a rotação (ângulo de torção) da secção de ambos os veios em B é dada por:

$$\phi_{B/A} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB} G_{AB}} = \frac{(11380 \text{ N.m})(0.3 \text{ m})}{\frac{\pi}{2} (0.0625 \text{ m})^4 (77 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2})} = 0.00185 \text{ radianos} = 0.106^\circ$$

**Problema 3** (ver figura)

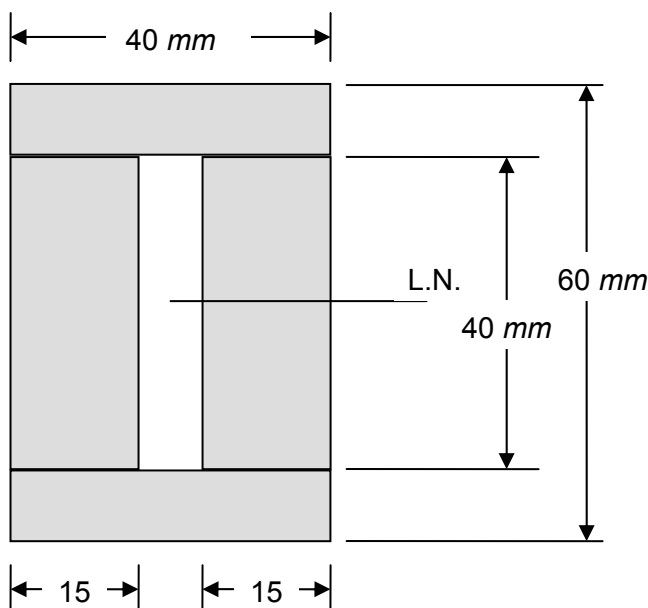
Duas barras (10 mm x 40 mm) de latão e duas barras (10 mm x 40 mm) de alumínio foram unidas de modo a constituir uma viga cuja secção transversal se mostra na figura. Utilizando os dados fornecidos na Tabela anexa, determine o momento máximo admissível quando o componente é flectido segundo o eixo horizontal.



	alumínio	latão
E	70 GPa	105 GPa
$\sigma_{\text{admissível}}$	100 MPa	160 MPa

**RESOLUÇÃO**

Uma vez que;  $n = \frac{E_{\text{lat}}}{E_{\text{alum}}} = \frac{105 \text{ GPa}}{70 \text{ GPa}} = 1.5$  a “secção transformada” toda em alumínio é:



a qual tem:

$$\bar{I} = \frac{1}{12} (40)(60)^3 - \frac{1}{12} (40 - 15 - 15)(40)^3$$

$$\bar{I} = 666.7 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 666.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

No alumínio, a máxima tensão normal em

flexão segundo o eixo horizontal  $\sigma_{\text{max}} = \frac{Mc}{I}$

ocorre para:  $c_{\text{alum}} = \frac{60}{2} = 30 \text{ mm}$

Fazendo  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{admissível}}$  do alumínio = 100 MPa, obtém-se:

$$M = (100 \text{ MPa}) \frac{\bar{I}}{c} = (100 \text{ MPa}) \frac{666.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}{0.03 \text{ m}} = 2222 \text{ N.m}$$

Para este  $M = 2222 \text{ kN.m}$ , o valor de “máxima tensão normal” no latão ( $c_{\text{lat}} = 20 \text{ mm}$ ) é dado por:

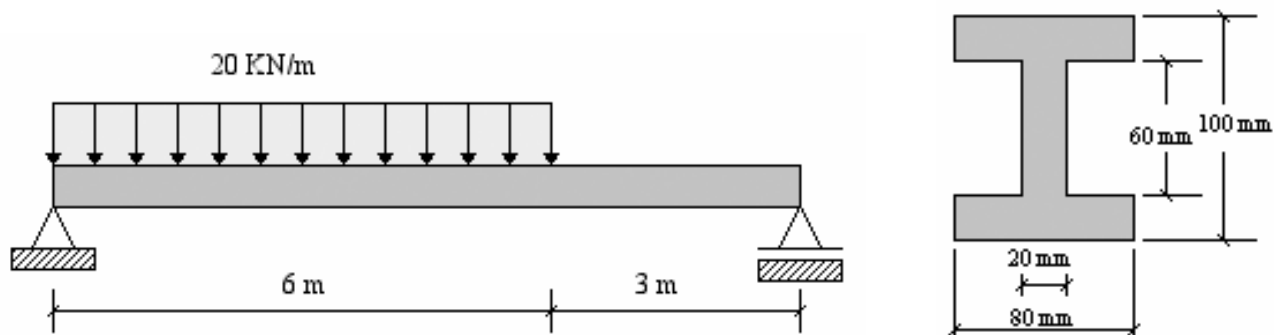
$$\sigma_{\text{max,lat}} = n \frac{M c_{\text{lat}}}{I} = 1.5 \frac{(2222 \text{ N.m})(0.02 \text{ m})}{666.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 100 \text{ MPa}$$

Uma vez que 100 MPa é inferior ao valor de  $\sigma_{\text{admissível}}$  do latão = 160 MPa, é o alumínio que controla, e a resposta ao problema é: **Momento máximo admissível = 2222 N.m = 2.22 kN.m**

**Problema 4** (ver figura)

Considere a viga simplesmente apoiada representada na figura. A viga é em aço ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) e suporta a carga uniformemente distribuída ( $20 \text{ kN/m}$ ) conforme é mostrado na figura.

- Calcule e represente os diagramas de esforço transversal e de momento flector ao longo de toda a viga.
- Determine a localização e a intensidade da tensão normal máxima devida à flexão.

**RESOLUÇÃO:**

Considerando a viga como um “corpo-livre”, podemos calcular as reacções nos apoios através de:

equilíbrio de forças verticais:  $+\uparrow \sum F_y = 0: R_A + R_B = 6 \text{ m} \times 20 \text{ kN/m} = 120 \text{ kN}$

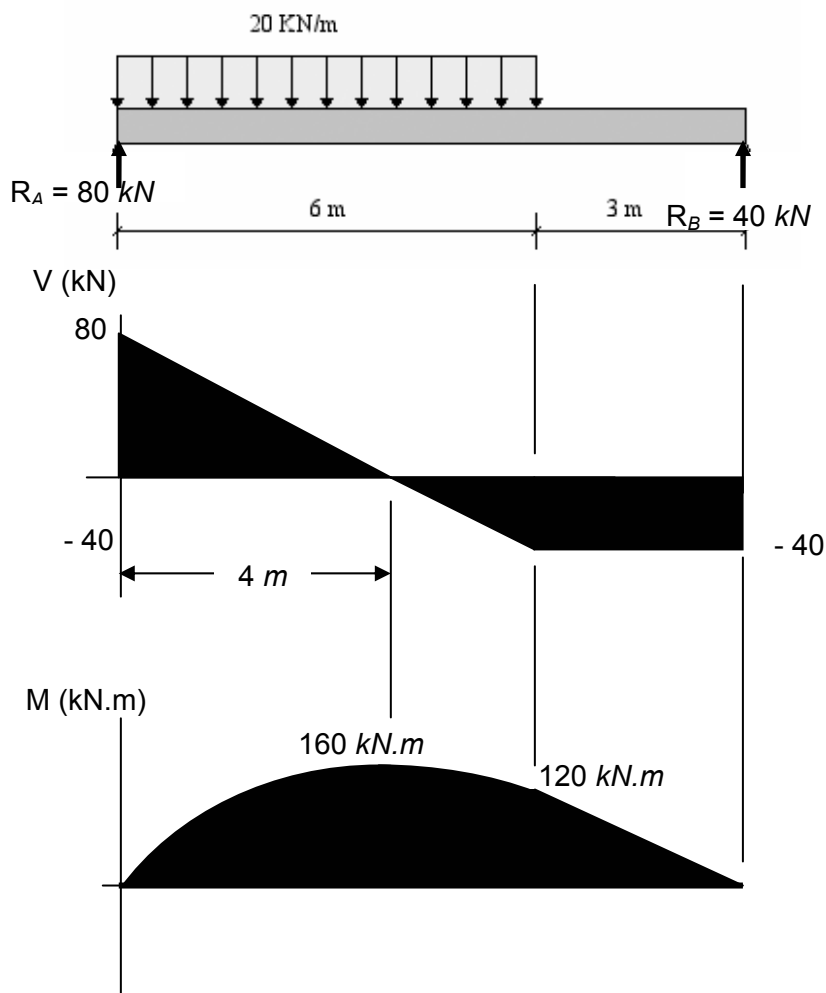
equilíbrio de momentos em torno do ponto B:

$$\curvearrowright \sum M_B = 0: -R_A(9\text{ m}) + (120 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

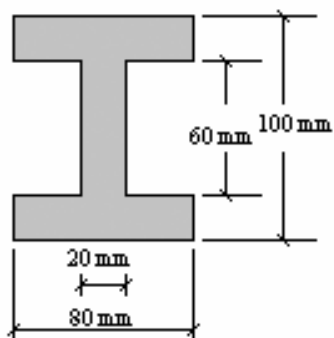
obtendo-se:

$$R_A = 80 \text{ kN}$$

$$R_B = 40 \text{ kN}$$



b)



A tensão normal máxima devida à flexão localiza-se junto às superfícies exteriores das abas da viga ( $c = 50 \text{ mm}$ ), a  $4 \text{ m}$  do apoio  $A$  onde o momento  $M$  é máximo ( $160 \text{ kN.m}$ )

O momento de inércia da viga é dado por:

$$\bar{I} = \frac{1}{12} (80)(100)^3 - 2 \times \left[ \frac{1}{12} (30)(60)^3 \right]$$

$$\bar{I} = 6.67 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 1.08 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 5.59 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

A intensidade da tensão normal máxima devida à flexão é dada por:

$$\sigma_{\max} = \frac{M c}{I} = \frac{(160000 \text{ N.m})(0.05 \text{ m})}{5.59 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 1431 \text{ MPa}$$