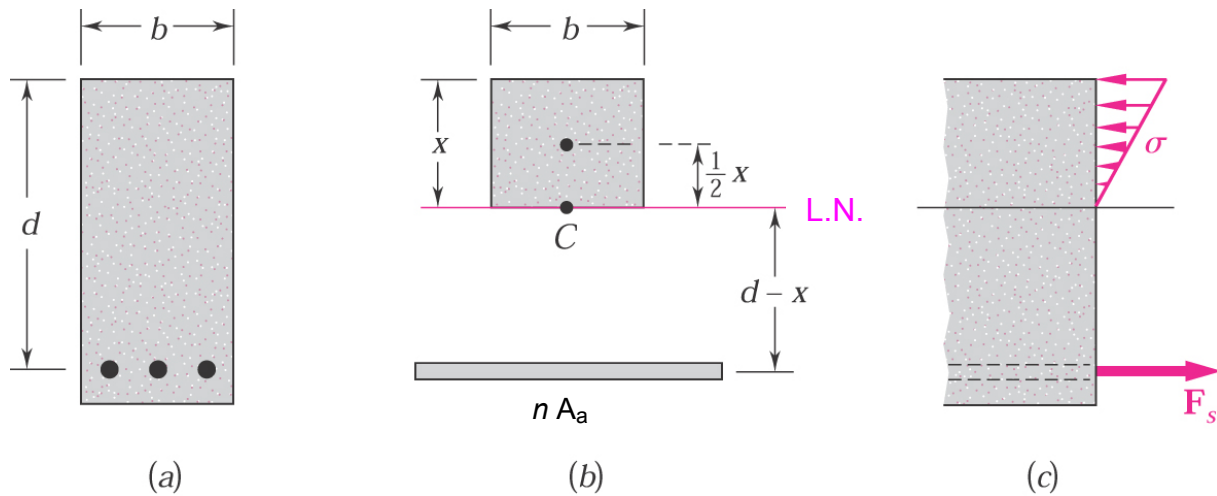


2º Teste de Mecânica dos Materiais I  
(9-Dez-2005)

**Problema 1**



**a)** A viga de betão armado cuja secção transversal está representada na figura (a) tem  $d = 450$  mm e  $b = 225$  mm. A viga está sujeita a um momento flector positivo. Cada um dos 3 varões de aço tem um diâmetro de 24 mm. O módulo de Young do betão é  $E_b = 20$  GPa e o módulo de Young do aço é  $E_a = 200$  GPa. Considerando que a tensão (máxima) admissível para o aço é  $\sigma_{adm,a} = 150$  MPa e a tensão (máxima) admissível para o betão é  $\sigma_{adm,b} = 10$  MPa, determine o máximo momento flector que pode ser aplicado à viga.

**b)** Uma viga de betão armado considera-se otimizada (dimensionalmente) quando a tensão máxima no aço é igual à tensão (máxima) admissível para o aço ( $\sigma_{adm,a}$ ) e, simultaneamente, a tensão máxima no betão é igual à tensão (máxima) admissível para o betão ( $\sigma_{adm,b}$ ). Mostre que para se atingir a optimização é necessário que a distância  $x$ , representada na figura (b), satisfaça a relação:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_{adm,a} E_b}{\sigma_{adm,b} E_a}}$$

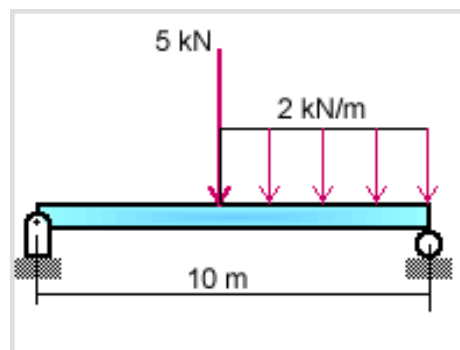
*Cotação:*

**a)** 3.5

**b)** 1.5

## Problema 2

Uma viga simplesmente apoiada tem 10 m de comprimento e está sujeita a uma carga concentrada de 5 kN aplicada a meio-vão e a uma carga distribuída de 2 kN/m aplicada na metade à direita, conforme se mostra na figura.



- Trace o diagrama de esforço transversal
- Trace o diagrama de momento flector
- Qual é o valor máximo absoluto do esforço transversal ?
- Qual é o valor máximo absoluto do momento flector ?

Cotação:

a) 2.0

b) 2.0

c) 0.5

d) 0.5

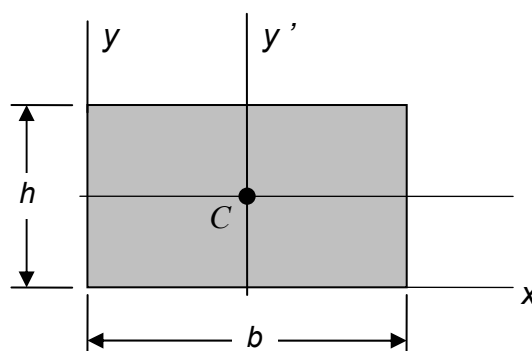
## FORMULÁRIO GERAL

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

teorema dos eixos paralelos:  $I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2$

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$



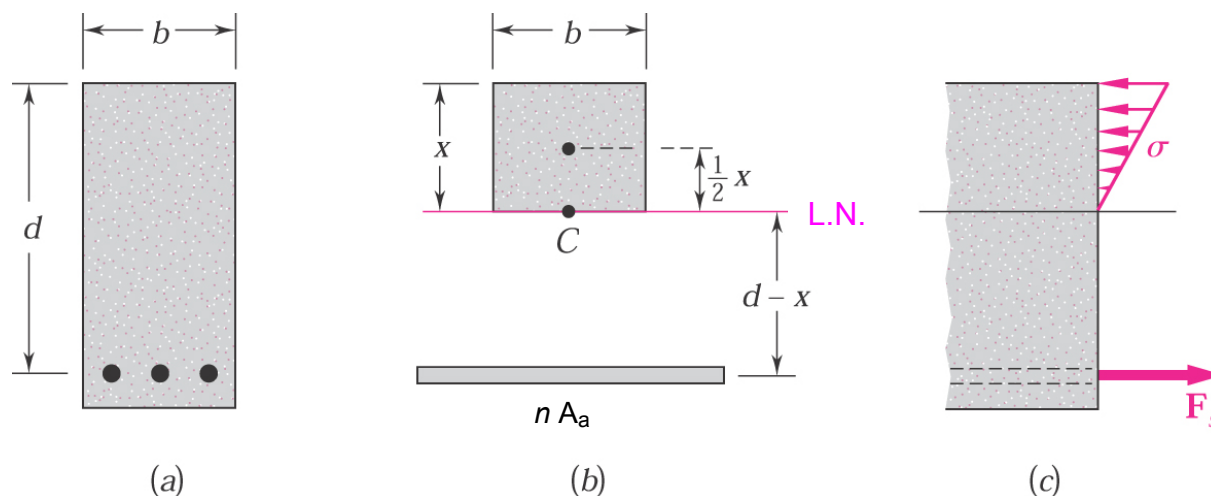
$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3$$

$$Q = A \bar{y}$$

**RESOLUÇÃO** do 2º Teste de Mecânica dos Materiais I  
(9-Dez-2005)

**Problema 1**



**a)** A viga de betão armado cuja secção transversal está representada na figura (a) tem  $d = 450$  mm e  $b = 225$  mm. Cada um dos 3 varões de aço tem um diâmetro de 24 mm. O módulo de Young do betão é  $E_b = 20$  GPa e o módulo de Young do aço é  $E_a = 200$  GPa e está sujeita a um momento flector positivo. Considerando que a tensão (máxima) admissível para o aço é  $\sigma_{adm,a} = 150$  MPa e a tensão (máxima) admissível para o betão é  $\sigma_{adm,b} = 10$  MPa, determine o máximo momento flector que pode ser aplicado à viga.

**Resolução da alínea a)**

$$n = \frac{E_a}{E_b} = \frac{200 \text{ GPa}}{20 \text{ GPa}} = 10$$

$$\text{área real dos 3 varões de aço: } A_a = 3 \left[ \frac{\pi}{4} (24 \text{ mm})^2 \right] = 1357,2 \text{ mm}^2$$

$$\text{área transformada dos 3 varões de aço: } n A_a = 10 A_a = 13572 \text{ mm}^2$$

O 1º momento (momento estático) da *área da secção transformada* da viga representada na fig. (b) terá de ser zero, pelo que:

$$b x \left( \frac{x}{2} \right) - (n A_a)(450 - x) = 225 x \left( \frac{x}{2} \right) - (13572)(450 - x) = 0 \quad x = 180,36 \text{ mm}$$

O 2º momento (m. de inércia) da *área da secção transformada* da viga representada na fig. (b) é dado por:

$$I = \frac{1}{3} (225) (180,36)^3 + (13572) (450 - 180,36)^2 = 1426,8 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1426,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

para o betão:

$$\sigma_{adm,b} = 10 \text{ MPa} \quad c = x = 0,18036 \text{ m}$$

$$M_{max} = \sigma_{adm,b} \left( \frac{I}{c} \right) = 10 \text{ MPa} \left( \frac{1426,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0,18036 \text{ m}} \right) \quad M_{max} \text{ para o betão} = 79,1 \text{ kN.m}$$

para o aço:

$$\sigma_{adm,a} = 150 \text{ MPa} \quad c = 450 - x = 269,64 \text{ mm} = 0,26964 \text{ m}$$

$$M_{max} = \frac{\sigma_{adm,a}}{n} \left( \frac{I}{c} \right) = \frac{150 \text{ MPa}}{10} \left( \frac{1426,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0,26964 \text{ m}} \right) \quad M_{max} \text{ para o aço} = 79,4 \text{ kN.m}$$

Finalmente, teremos de escolher o menor dos  $M_{max}$ ; o qual é neste caso imposto pelo betão:

$$M_{max} \text{ para a viga} = \mathbf{79,1 \text{ kN.m}}$$

**b)** Uma viga de betão armado considera-se otimizada (dimensionalmente) quando a tensão máxima no aço é igual à tensão (máxima) admissível para o aço  $\sigma_{adm,a}$  e, simultaneamente, a tensão máxima no betão é igual à tensão (máxima) admissível para o betão  $\sigma_{adm,b}$ . Mostre que para se atingir a optimização é necessário que a distância  $x$ , representada na figura (b), satisfaça a relação:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_{adm,a} E_b}{\sigma_{adm,b} E_a}}$$

### Resolução da alínea b)

Sendo  $I$  o momento de inércia) da *área da secção transformada* da viga representada na fig. (b), a tensão (máxima) admissível para o aço  $\sigma_{adm,a}$  está relacionada com o momento  $M$  aplicado:

$$\sigma_{adm,a} = n \frac{M(d-x)}{I} \quad (1)$$

e a tensão (máxima) admissível para o betão  $\sigma_{adm,b}$  está relacionada com o momento  $M$  aplicado:

$$\sigma_{adm,b} = \frac{Mx}{I} \quad (2)$$

Dividindo a eq. (1) pela eq. (2), obtem-se:

$$\frac{\sigma_{adm,a}}{\sigma_{adm,b}} = \frac{n(d-x)}{x} = n \frac{d}{x} - n \quad (3)$$

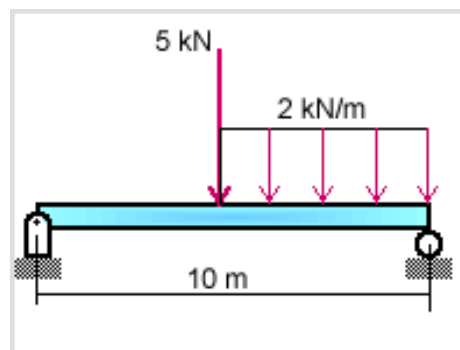
$$\frac{d}{x} = 1 + \frac{1}{n} \frac{\sigma_{adm,a}}{\sigma_{adm,b}} = 1 + \frac{E_b}{E_a} \frac{\sigma_{adm,a}}{\sigma_{adm,b}} \quad (4)$$

Finalmente, constata-se:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_{adm,a} E_b}{\sigma_{adm,b} E_a}}$$

## Problema 2

Uma viga simplesmente apoiada tem 10 m de comprimento e está sujeita a uma carga concentrada de 5 kN aplicada a meio-vão e a uma carga distribuída de 2 kN/m aplicada na metade à direita, conforme se mostra na figura.



- Trace o diagrama de esforço transversor
- Trace o diagrama de momento fletor
- Qual é o valor máximo absoluto do esforço transversor ?
- Qual é o valor máximo absoluto do momento fletor ?

### Resolução:

Traçando o diagrama de corpo-livre da viga:

$$+\uparrow \sum F_y = 0: R_A + R_B - 5 \text{ kN} - 10 \text{ kN} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0: -R_A(10\text{m}) + (5\text{kN})(5\text{m}) + (10\text{kN})(2.5\text{m}) = 0$$

$$R_A = 5 \text{ kN}$$

$$R_B = 10 \text{ kN}$$

c)

$$|V|_{\max} = 10 \text{ kN}$$

d)

$$|M|_{\max} = 25 \text{ kN.m}$$

